

GEOMETRIA DIFERENCIAL I RELATIVITAT

Joan Girbau

Publicacions de la SCM
Volum 8



GEOMETRIA DIFERENCIAL I RELATIVITAT

Joan Girbau

Barcelona, 2022

Girbau, Joan, 1942- autor

Geometria diferencial i relativitat. — Primera edició (IEC). — (Publicacions de la SCM ; volum 8)
“Aquesta edició és una reproducció íntegra i textual de l’edició original de la UAB (1993)”. — Índex
ISBN 9788499656618

I. Societat Catalana de Matemàtiques II. Títol III. Col·lecció: Publicacions de la SCM ; 8

1. Geometria diferencial. 2. Relativitat (Física)

514.7

530.12

Aquest llibre va ser publicat l’any 1993 pel Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona i va ser un dels primers elaborats amb el sistema $\text{\LaTeX}$ d’edició de textos. L’any 2022, gràcies a la col·laboració del professor Gregori Guasp, s’ha generat la present edició a partir dels arxius de $\text{\LaTeX}$ de llavors, tot procurant que l’aparença del llibre actual sigui molt similar (gairebé idèntica) a la de 1993

L’edició d’aquesta obra
ha estat a cura de Pere Pascual

© Joan Girbau i Badó

© Societat Catalana de Matemàtiques, filial de l’Institut d’Estudis Catalans,
per a aquesta edició

Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició (UAB): 1993

Primera edició (IEC): juliol de 2022

Aquesta edició és una reproducció íntegra i textual de l’edició original de la UAB (1993)

Text revisat la Unitat d’Edició del Servei Editorial de l’IEC

ISBN: 978-84-9965-661-8

DOI: 10.2436/10.2002.03.1



Aquesta obra és d’ús lliure, però està sotmesa a les condicions de la llicència pública de *Creative Commons*. Es pot reproduir, distribuir i comunicar l’obra sempre que se’n reconegui l’autoria i l’entitat que la publica i no se’n faci un ús comercial ni cap obra derivada. Es pot trobar una còpia completa dels termes d’aquesta llicència a l’adreça:
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/deed.ca>.

En memòria de Josep Teixidor i Batlle, el meu mestre. Quan jo estudiava el primer curs d'universitat amb la intenció de seguir la carrera de Farmàcia, va saber motivar-me de tal manera per les matemàtiques que des de llavors ja no les he pogut deixar mai més.

Contingut

Pròleg	1
I Un cursset de geometria diferencial	7
1 Introducció al càlcul tensorial	9
1 Producte tensorial d'espais vectorials de dimensió finita	9
2 Tensors contravariants i covariants	11
3 Propietat universal del producte tensorial	12
4 Contraccions tensorials	13
5 Tensors simètrics i antisimètrics	14
6 Producte exterior	15
7 Contracció interior d'un element de $\wedge^r E^*$ per un vector $v \in E$.	17
2 Geometria diferencial de $\mathbf{R}^n$	19
1 Camps vectorials en un obert U de $\mathbf{R}^n$	19
2 Grups uniparamètrics locals	20
3 Derivada covariant i claudàtor de dos camps	21
4 Aplicació lineal tangent i interpretació del claudàtor	23
5 Formes diferencials i diferencial exterior	23
6 Imatge inversa d'una p -forma per una aplicació	26
3 Corbes i superfícies de $\mathbf{R}^3$	27
1 Corbes	27
1.1 Definició, vector tangent, paràmetre arc	27
1.2 Ordre de contacte	28
1.3 Curvatura i torsió. Fórmules de Frenet	29
1.4 La curvatura i torsió determinen la corba, llevat de desplaçaments de $\mathbf{R}^3$	33

2	Superfícies	35
2.1	Exemples i definició	35
2.2	Espai tangent en un punt i camps vectorials	37
2.3	Primera forma quadràtica fonamental	38
2.4	Segona forma quadràtica fonamental i derivació covariant	39
2.5	Propietats formals de la derivada covariant $\bar{\nabla}_X Y$	42
2.6	Curvatures normals i segona forma quadràtica fonamental	43
2.7	Curvatures principals	44
2.8	Aplicacions de Gauss i de Weingarten	47
2.9	Una altra interpretació de la segona forma quadràtica fonamental	49
2.10	Formes diferencials ordinàries i formes diferencials vecto- rials sobre una superfície	50
2.11	Teorema Egregi de Gauss	52
4	Varietats diferenciables	59
1	Espais topològics paracompactes	59
2	Definició de varietat diferenciable i exemples	60
3	Aplicacions diferenciables entre varietats; espai tangent	63
4	Camps vectorials, camps tensorials, formes diferencials	66
5	Formes diferencials i aplicacions multilineals alternades. Imatge inversa d'una forma diferencial per una aplicació	69
6	Particions de la unitat	70
5	Varietats de Riemann	73
1	Definició i exemples. Longitud de corbes	73
2	Connexions i símbols de Christoffel	74
3	Derivades covariants de camps que només estan definits sobre corbes	76
4	Connexió de Riemann	77
5	Càlcul de variacions i geodèsiques	79
6	Isometries infinitesimals	83
7	Tensor de curvatura	85
8	Curvatures seccionals	89
9	Càlcul de la derivada covariant i del tensor de curvatura pel mètode de la referència mòbil	93
10	Extensió d'una derivació a totes les capes tensorials	97
11	Diferencial covariant d'un camp tensorial. Expressió en coorde- nades	100
12	Divergència d'un camp tensorial	101

13	Segona identitat de Bianchi i teorema de Schur	102
14	Tensor de Ricci i curvatura escalar	105
15	Curvatura escalar i divergència del tensor de Ricci	106
6	Integració i fórmula de Stokes	109
1	Varietats amb vora	109
2	Orientació en varietats	113
3	Integració en varietats orientades	116
4	Fórmula de Stokes	119
5	Teorema de la divergència	121
II	Unes pinzellades de física clàssica	125
7	Cinemàtica i dinàmica de Newton d'una partícula material	127
1	Cinemàtica de Newton	127
2	Llei fonamental de la dinàmica de Newton: "força igual a massa per acceleració"	128
3	Quantitat de moviment, energia cinètica, potència, treball . . .	131
4	Forces que deriven d'un potencial	132
5	Conservació de l'energia	133
8	Equacions de Lagrange	135
1	Sistemes de partícules amb lligadures holònomes que no depenen del temps	135
2	Velocitats virtuals del sistema: fibrat tangent	139
3	Forces de lligadura i principi de les potències virtuals	140
4	Equacions del moviment a la varietat M	146
5	Forma de Lagrange de les equacions del moviment	148
6	Equacions del moviment quan les forces deriven d'un potencial	151
9	Teoremes de conservació. Xoc de partícules	155
1	Teoremes de conservació	155
2	Xoc de partícules	160
10	Funció de Lagrange dels cossos rígids	163
1	Centre de masses	163
2	Cossos rígids. Tensor d'inèrcia	163
3	Càlcul de la funció de Lagrange en els cossos rígids	167

11 Llei de gravitació universal i el problema dels dos cossos	171
1 Equacions de les còniques en polars	171
2 Llei de gravitació universal	174
3 El problema dels dos cossos	174
12 Mecànica dels medis continus	183
1 Una fórmula de derivació d'integrals que depenen d'un paràmetre	183
2 Equació de continuïtat d'un medi continu	184
3 Quantitat de moviment d'una regió V . Força que actua sobre V	186
4 Forces exteriors i forces de lligadura. Principi de Cauchy	187
5 Equacions del moviment	192
13 Electromagnetisme	195
1 Electrostàtica	195
1.1 Camp elèctric	195
1.2 Camp elèctric i potencial creat per un cos continu	196
2 Magnetostàtica	203
2.1 Camp magnètic	203
2.2 Corrents elèctrics d'intensitat constant i camps magnètics	204
3 Electromagnetisme	208
3.1 Camps magnètics que varien amb el temps. Equacions de Maxwell	208
III Relativitat especial i general	213
14 Cinemàtica de la relativitat especial	215
1 Paper dels sistemes de referència en la física clàssica	215
2 Els postulats de la relativitat especial	219
3 Les transformacions de Lorentz	223
4 Revisió dels postulats de la relativitat especial	230
5 Conseqüències de les transformacions de Lorentz	236
6 Forma vectorial de les transformacions de Lorentz	238
7 Llei de composició de velocitats	239
8 L'espai de Minkowski	240
9 Temps propi d'una partícula	244
10 Interpretació de diversos problemes a l'espai de Minkowski . . .	247

15 Dinàmica de la relativitat especial	251
1 Impulsió i força de Minkowski	251
2 Equivalència de massa i energia	257
3 Les quatre components del vector força de Minkowski	260
16 Dinàmica relativista de fluids: el tensor d'impulsió-energia	263
1 Densitat de massa-energia	263
2 Vector densitat de força exterior	264
3 Tensor de tensions o pressions	265
4 Equacions del moviment d'un fluid	266
5 El tensor d'impulsió-energia d'un fluid	268
6 El tensor d'impulsió-energia dels fluids perfectes	269
17 Electromagnetisme i relativitat especial	271
1 Les equacions de Maxwell i l'equació de continuïtat	271
2 Força a què està sotmesa una càrrega en un camp electromagnètic	275
18 Els fonaments de la relativitat general	277
1 L'exemple del disc giratori	277
2 Teoria de la gravitació	284
3 Orientabilitat temporal	286
4 L'equació d'Einstein	287
5 Aproximació newtoniana de l'equació d'Einstein i determinació de la constant k	289
19 Camp gravitatori produït per una estrella	295
1 Rudiments sobre foliacions	296
2 Conceptes bàsics de grups de Lie	298
3 Varietats de Lorentz amb simetria esfèrica	301
4 Varietats de Lorentz amb simetria esfèrica i tensor de Ricci nul	316
5 Camp gravitatori produït per una estrella: solució de Schwarzschild	325
6 Òrbites dels planetes del sistema solar. Avançament del periheli de Mercuri	328
7 Desviament dels raigs de llum en passar prop del sol, i observadors que mirant endavant es veuen el clatell	334
8 Forats negres. Espai-temps de Kruskal	336

20 Models cosmològics	345
1 Galàxies	346
2 Models cosmològics de Robertson-Walker	346
3 Relacions entre la funció f , la densitat σ i la pressió p en un model de Robertson-Walker	351
4 Llei de Hubble	358
5 Principi i fi de l'univers en els models de Robertson-Walker maximals	359
6 Com saber si la curvatura de l'espai és positiva, negativa o nul·la	362
7 Models de Friedmann	362
8 Trajectòries dels raigs de llum en els models de Robertson-Wal- ker	365
9 Trajectòries dels raigs de llum en els models de Friedmann . . .	367
Índex de noms i de matèries	371

Pròleg

La Teresa tancà les dues aixetes, la de l'aigua calenta i la de la freda, obrí la porta plegable de polistirè que separava la cabina de dutxa de la resta de la minúscula habitació de bany, i, posant els peus damunt una petita catifa, ja molt gastada, que ella mateixa havia col·locat allà abans d'entrar, prengué la tovallola i començà a eixugar-se. Estava sola en el petit apartament de Cerdanyola que compartia amb la Maria i la Sílvia, dues companyes d'universitat que ara havien marxat a Sitges per tal de passar-li aquell primer cap de setmana de maig. Ella s'havia quedat. La idea d'anar amb les seves amigues no l'havia engrescada gaire, i, tot just feia un moment, mentre es dutxava, havia esbossat un pla molt atractiu per aprofitar aquella situació inusual de restar sola en aquell diminut pis.

La Teresa era una noia no gaire alta, més aviat prima, amb uns braços delicats que li donaven un cert aspecte de fragilitat. Habitualment, la cabellera llisa, d'un castany fosc, li baixava de manera despreocupada pels dos cantons de la cara, com les rames flexibles d'un desmai, i, tot deixant-li lliure el front, li cobria els polsos, la part superior de les orelles i, sovint, les arracades, la qual cosa l'obligava a apartar de tant en tant els flocs rebels amb un ràpid moviment de mà. Portava normalment unes bruses poc cenyides que deixaven sempre els braços al descobert. A través de l'escot, gairebé sempre triangular, s'endevinaven sovint unes formes arrodonides, moderadament abundants, que, sense anar massa subjectes, adoptaven amb naturalitat una posició harmoniosa. Duia fal·dilles una mica exagerades, més llargues o més curtes que les habituals, que alternava segons la moda, l'època de l'any o el seu estat d'ànim. No era gaire amant dels pantalons i, des de la seva infantesa, no s'havia posat uns texans. Calçava sempre sabates planes, lleugeres, i només en ple hivern, per evitar que els peus se li gelessin, havia de recórrer a la utilització de pantis. El que més sobresortia, però, en la figura de la Teresa eren els seus ulls vivíssims, somiadors, i el seu somriure jovial, a vegades enigmàtic. Tot això conferia a la seva cara una expressió personalíssima que reflectia fidelment un temperament impulsiu, més aviat optimista, ombrejat amb algunes pinzellades de malenconia.

Estudiava la carrera de Matemàtiques a la Universitat Autònoma, i ni ella mateixa sabia dir amb certesa quin curs feia, ja que portava assignatures de quart, de tercer, i, fins i tot, una de segon. Que lluny quedava aquell primer curs que havia tret al juny, tot net, àdhuc amb un excel·lent i un notable! Que boniques eren les matemàtiques quan s'entienien! Però, que ensopides podien resultar determinades assignatures quan no s'estava motivat!

Quan feia el batxillerat, a la Teresa li agradava més la física. ¿Què la va decidir, doncs, a triar la carrera de Matemàtiques, finalment? No ho podia dir ben bé. Potser el fet que, al BUP, d'aquesta matèria n'entenia tots els detalls i gaudia amb la seva comprensió, mentre que d'aquella —tot i que els temes semblaven més suggestius— li costava molt copsar el sentit profund dels raonaments simplificats que contenien els textos que seguien al seu institut.

Durant el primer curs d'universitat va creure descobrir de veritat l'essència de les matemàtiques, amb el rigor i la bellesa meravellosa d'algunes demostracions, i va fruir interiorment molt amb aquesta troballa. Ara, però, la il·lusió primera havia passat i, malgrat que algunes classes li semblaven interessants i veritablement boniques, es veia desbordada per la quantitat de matèria que cada professor estava entestat a embotir en la seva assignatura respectiva. A més, ella, que sempre actuava impulsivament, no sabia —o no volia— organitzar el seu temps metòdicament, com alguns companys seus de curs, que abans dels exàmens planificaven les hores d'estudi per assignatures, i sabien deixar un determinat problema d'àlgebra a mig fer, perquè llavors els tocava dedicar-se, segons el seu pla, a les equacions diferencials, per exemple. Ella, si no estava prou motivada, no era capaç d'estudiar cap matèria. Recordava aquell mes de maig de l'any anterior, just abans dels exàmens, quan va tenir aquell afer amb en Miquel. Resultat: tres *cates*, de les tres assignatures a les quals es va presentar.

Era una tarda lluminosa i clara. Els dos havien anat d'excursió amb la resta de companys de curs. Eren prop d'una font, matant el temps, esperant tontament que fossin les sis, hora en què el xofer de l'autocar tornaria a aquell indret per recollir-los, quan la Teresa, amb una habilitat de la qual ella mateixa se sorprengué, apartà en Miquel de la resta del grup i se l'emportà un centenar de metres més enllà, en un indret solitari. Després d'esguardar silenciosament el fons dels seus ulls durant uns minuts, sense proferir paraula, el besà apassionadament a la boca, obeint els impulsos més pregonos de la seva ànima, i, segons ella creia, més nobles. Cap mala intenció no havia travessat el seu subconscient. Allò no era sinó la manifestació d'un sentiment espontani que no havia passat prèviament pel sedàs amb què l'educació i les convencions socials adquirides filtren els nostres primers impulsos. En Miquel, però, no ho degué entendre així, i, interpretant malament la seva candidesa, es degué

formar d'ella una imatge de noia desvergonyida, acostumada a tenir aventures amb qualsevol —extrem, aquest, que era absolutament fals. Això és el que ella deduí del tracte aparentment afectuós, però groller, amb què en Miquel l'obsequià des de llavors. Ella no pogué descobrir ni un gram de generositat, ni una guspira d'amor per part d'en Miquel en la relació posterior entre ells dos. Profundament decebuda, l'apartà decididament de la seva vida. Creu i ratlla! Era natural que en aquelles circumstàncies, les matemàtiques li semblessin coses d'un altre planeta i, els exàmens, encreuats sense sentit.

Però ara, un any després, tot allò havia passat i tornava a interessar-se pels estudis, malgrat que alguna vegada, quan la malenconia s'apoderava del seu esperit, pensava encara en aquell amor malmès.

Mentre s'acabava d'eixugar, sortí del lavabo i creuà el passadís per tal d'arribar al dormitori. El seu llit era l'únic que estava una mica endreçat. Damunt els altres dos, faldilles, texans, mocadors, calces, bruses i sostenidors compartien l'espai amb una caixa de sabates, un portamonedes, una còfia de bany, un mallot i un curt barnús de platja virolat. Normalment, l'habitació no estava tan desordenada, sense arribar mai a ser un model de pulcritud, però avui la marxa precipitada de la Maria i la Sílvia —després d'haver embotit en una maleta aquelles peces de roba i estris per abillar-se que consideraven més necessaris, just deu minuts abans de l'hora teòrica de sortida del tren— havia deixat el dormitori en aquell estat. La Teresa s'assegué al seu llit mentre, amb la tovallola, s'acabava d'eixugar els cabells amb molta parsimònia. Veié el barnús sobre el llit de la Sílvia i se'l posà, per protegir el seu cos humit de la sensació de fresca que començava a sentir, malgrat que l'ambient era càlid. Instintivament es calçà unes sabatilles que tenia sota la tauleta de nit, però, quan ho va haver fet, dubtà un moment i animada per un estrany desig, se les tragué amb un lleu moviment de turmells. Caminant llavors molt a poc a poc per delectar-se en l'agradable sensació que li produïa el contacte de la fredor del mosaic amb els peus nus, es dirigí al menjador. Era l'habitació més alegre de l'apartament, amb un ampli finestral que donava a la plaça de l'església, i per on entraven els raigs mig esmorteïts d'un sol de tarda cobert per uns núvols inconsistents, juntament amb la cridòria llunyana d'uns nens que jugaven amb delit. Arrambada a la paret oposada a aquella finestra, una petita taula envoltada de tres cadires, acomplia la múltiple funció de taula de menjar, d'estudi o de joc, segons convenia. Per sobre d'ella, unes lleixes de fusta recolzades a la paret sostenien llibres, apunts i alguns discos, juntament amb altres objectes de naturalesa variada, com pintallavis, arracades o paquets de cigarretes. La Teresa se situà davant d'aquests prestatges, alçà el braç dret, i, posant-se de puntetes mentre lluitava amb el cantell de la taula que li impedia arribar amb facilitat a les lleixes, aconseguí abastar un llibre de geometria diferencial

i relativitat que havia comprat aquell matí a la llibreria de la facultat.

Feia una estona, mentre sentia sobre la pell del seu cos el martelleig de l'aigua calenta llançada a pressió, i el vapor l'envoltava i omplia tota l'habitació, havia desitjat esmerçar aquelles hores de solitud, especialment propícies per a la concentració, en una lectura dels últims capítols d'aquell llibre, dedicats a la relativitat general i als models cosmològics.

L'agafà amb il·lusió i, sucumbint al desig que havia experimentat mentre es dutxava, es disposà a obrir-lo amb una fruïció que molts dels seus companys no podrien mai ni imaginar. La Sílvia, per exemple, que estudiava Dret i per a qui les matemàtiques es reduïen a saber comptar de pressa, no podria entendre pas la bellesa extraordinària, superior a vegades a les millors obres d'art, que es pot amagar darrera d'una teoria matemàtica o física ben construïda, i el plaer immens que pot proporcionar la seva comprensió. La Teresa s'imaginava el goig profund d'alguns investigadors en el moment d'entendre un determinat fet fins llavors inexplicable, i s'adonava que aquesta joia podia ser de les més grans que pot sentir l'ésser humà.

Abans d'obrir el llibre, algunes consideracions inoportunes van ombrejar la seva disposició d'esperit. Els exàmens eren a prop, d'aquella matèria no havia de ser avaluada i, coneixent-se com es coneixia, tenia por d'endinsar-se en l'estudi profund d'un tema que l'absorbiria i que, de ben segur, no sabia deixar per dedicar-se a les assignatures que de veritat li convenia aprovar. Però, com que era impulsiva, s'adonà que finalment es deixaria emportar pel seu primer desig i que cap altra consideració la forçaria a posposar la lectura d'aquell llibre ¿Per què, però, l'havia comprat? Havent estat escrit per un matemàtic, la part de geometria diferencial, amb una mica de sort, encara podia estar bé, però ¿i la resta? De fet ella tenia un mal record dels textos de física escrits per matemàtics. Recentment, a la biblioteca del departament, havia trobat un llibre de tapes grogues i títol molt atractiu (Relativitat per a Matemàtics) que li havia robat molt de temps i l'havia decebuda d'allò més. En general, pensava, quan un matemàtic escriu sobre un tema de física, intenta descriure amb molt rigor el model matemàtic subjacent, però no s'ocupa en absolut de les idees que, al llarg de la història, han portat els físics a adoptar aquell model en front d'altres. Quan la Teresa llegia en aquell llibre groc, segons ella horripilant, la definició de tensor d'impulsió-energia, per exemple, s'imaginava l'Einstein, després d'una nit d'insomni, preguntant-se: ¿quin tensor més reconseguit i inversemblant em podria inventar jo ara per descriure la matèria, i, al mateix temps, fastiguejar els estudiants de Física en el futur? La Teresa comprenia que, de veritat, les coses no podien haver anat així, i es quedava amb les ganes de conèixer la motivació profunda d'haver considerat aquell tensor i no un altre. ¿Per què, doncs, no agafava llibres de física escrits per físics? Ja ho feia,

però li costava molt de treure'n l'entrellat, ja que moltes vegades utilitzaven raonaments heurístics com si fossin construccions sòlidament fonamentades en el rigor més absolut. I ella, al cap i a la fi, era estudiant de Matemàtiques, i estava acostumada a buscar sempre tres peus al gat, a cercar contraexemples a l'enunciat de qualsevol proposició per assegurar-se de la seva validesa, i, amb aquest esperit, la lectura de qualsevol text de física li resultava extremadament costosa.

Ara, però, estava convençuda que el llibre que tenia entre les mans seria diferent, que explicaria la motivació profunda de les coses, amb una argumentació matemàtica sòlida, sense fissures, que ella podria entendre. Amb aquesta convicció, allunyant qualsevol altre pensament, l'obrí impetuosament. La curiositat la portà a l'últim paràgraf del llibre:

“Això ens diu que un raig lluminós emès al principi de l'univers ($t = 0$) en una determinada direcció de S , arriba al mateix punt de partida (fa una volta sencera a S) just a l'instant final de l'univers ($t = t_F$). Dit d'una altra manera, triga tota la duració de l'univers a fer una volta sencera a S .”

Ella ¿ho arribaria a entendre, tot això? Un raig lluminós que fa una volta sencera a l'univers i que, just a l'instant final, torna al mateix lloc de partida! Fascinant! Però, ¿hi ha hagut principi de l'univers? i ¿hi haurà necessàriament final? El cap li començava a donar voltes. Tancà impulsivament el llibre i l'obrí pel principi. Posà els ulls al començament del pròleg:

“La Teresa tancà les dues aixetes, la de l'aigua calenta i la de la freda, obrí la porta plegable de polistirè que separava la cabina de dutxa de la resta de la minúscula habitació de bany, i, posant els peus damunt una petita catifa, ja molt gastada, que ella mateixa havia col·locat allà abans d'entrar, prengué la tovallola i començà a eixugar-se.”

Increïble? La Teresa era ella, i el pròleg estava descrivint el que ella havia estat fent just mitja hora abans. Si seguia llegint, arribaria sens dubte al que estava fent ara, com si el temps, després de donar tota la volta a un cercle, tornés al començament. Si saltava tres o quatre fulls més endavant, arribaria, potser, a saber el que faria d'aquí a uns instants, a conèixer el seu futur!

De cop i volta el timbre de la porta sonà amb insistència. ¿Qui podria ser? No esperava ningú. Potser era algú que es confonia de pis. Optà per no contestar. De fet, tampoc no podia anar a obrir, portant com a única indumentària aquell curtíssim barnús de platja, que s'havia posat just quan el primer calfred va recórrer el seu cos humit després de la dutxa calenta. Però, com que el timbre sonava insistentment, s'aixecà, es dirigí cap a la porta i l'entreobrí amb la intenció de dir a l'inesperat visitant: “s'equivoca”, i tornar-la a tancar de cop. Però ara sí, una esgarripança més pregonada que aquella primera

estremí totes les seves neurones i, una vegada recuperat el capteniment, exclamà: Miquel! ¿Què hi fas, aquí?

Estructura del llibre i coneixements previs requerits

Aquest llibre consta de tres parts ben diferenciades:

- 1) Un curset de geometria diferencial (capítols 1-6).
- 2) Unes pinzellades de física clàssica (capítols 7-13).
- 3) Relativitat especial i general (capítols 14-20).

Els únics coneixements previs requerits per a la seva lectura són els conceptes bàsics d'àlgebra lineal i de càlcul infinitesimal en una i diverses variables que constitueixen el contingut usual de la major part dels primers cursos de les llicenciatures de ciències o de les carreres tècniques de nivell superior. Els conceptes més elementals de topologia general (com les nocions d'obert, tancat, compacte, condició de separació de Hausdorff, etc.) també se suposen coneguts. En canvi, no són necessaris coneixements previs de física, ja que aquests estan continguts a la segona part, que parteix de zero. Per llegir els capítols 14 i 15, que constitueixen una bona part de la relativitat especial, només cal haver llegit abans el capítol 7 (per al qual no fa falta cap coneixement previ). En canvi, per a la relativitat general, a més del material de varietats de Riemann del capítol 5, el lector haurà de conèixer els conceptes bàsics de dinàmica de fluids (capítols 12 i 16), sense els quals no podrà entendre bé el significat del tensor d'impulsió-energia, i també la resolució del problema dels dos cossos en mecànica clàssica (capítol 11), sense la qual no entendre la descripció de les trajectòries dels planetes des del punt de vista de la relativitat.

Part I

Un curset de geometria diferencial

Des que Newton introduí el concepte de curvatura d'una corba plana (en la seva obra *Geometria Analítica*) fins a l'aparició, el 1869, d'un treball de Christoffel que explicava amb claredat les idees que Riemann havia esbossat uns anys abans (1854), hi ha un llarg camí de creació matemàtica que condueix a l'inici de la construcció del que més tard seria un gran i sòlid edifici anomenat geometria diferencial. Una fita important en aquest camí és el descobriment per part de Gauss (1827) d'un dels fets més remarcables de la teoria de superfícies de l'espai, avui conegut amb el nom de Teorema Egregi.

En aquesta part del llibre presentarem —des d'un punt de vista actual i a partir de zero— els conceptes més bàsics i els resultats més fonamentals d'aquesta branca de les matemàtiques que, a la segona dècada del nostre segle, es revelà com el marc idoni per a la inclusió de la teoria de la gravitació dins de la teoria de la relativitat.

El capítol 5 (dedicat a les varietats de Riemann) és bastant més extens que els altres i conté apartats que en primera lectura poden semblar massa “tècnics” (8, 11, 13, 14 i 15), però que són utilitzats després en els capítols dedicats a relativitat general (part III).

Capítol 1

Introducció al càlcul tensorial

Conveni. Tots els espais vectorials que considerarem aquí seran de dimensió finita sobre el cos $\mathbf{R}$ dels nombres reals.

1 Producte tensorial d'espais vectorials de dimensió finita

Donats dos espais vectorials E i F , volem construir un nou espai vectorial, que designarem per $E \otimes F$, i una aplicació $\tau: E \times F \rightarrow E \otimes F$, de tal manera que el parell $(E \otimes F, \tau)$ compleixi les propietats següents:

- 1) τ és bilineal.
- 2) Si $e_1, \dots, e_n$ és base de E i $v_1 \dots v_m$ és base de F , llavors $\{\tau(e_i, v_j)\}$ és base de $E \otimes F$, on $i = 1 \dots n; j = 1 \dots m$.

Definició 1.1 Sigui $(E \otimes F, \tau)$ un parell, on $E \otimes F$ és un espai vectorial i τ una aplicació de $E \times F$ en $E \otimes F$. Suposem que el parell $(E \otimes F, \tau)$ compleix 1) i 2). Sigui $(E \hat{\otimes} F, \tau')$ un altre parell anàleg que compleixi les mateixes propietats. Direm que f és un isomorfisme entre aquests dos parells si f és un isomorfisme d'espais vectorials $E \otimes F \xrightarrow{f} E \hat{\otimes} F$ que fa commutatiu el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E \otimes F & & \\ \tau \uparrow & \searrow f & \\ E \times F & \xrightarrow{\tau'} & E \hat{\otimes} F. \end{array}$$

Proposició 1.2 (Unicitat de $(E \otimes F, \tau)$) Dos parells $(E \otimes F, \tau)$ i $(E \hat{\otimes} F, \tau')$ que compleixin les propietats 1) i 2) sempre són isomorfs.

DEMOSTRACIÓ. Sigui $e_1 \dots e_n$ una base de E i $v_1 \dots v_m$ una base de F . Si volem que f faci commutatiu el diagrama anterior, haurà d'aplicar $\tau(e_i, v_j)$ en $\tau'(e_i, v_j)$. Però com que els $\tau(e_i, v_j)$ constitueixen una base de $E \otimes F$, per 2), i els $\tau'(e_i, v_j)$ són base de $E \hat{\otimes} F$, f queda determinat de manera única per la condició anterior, i com que aplica una base en una base és un isomorfisme. ■

Proposició 1.3 (*Existència del parell $(E \otimes F, \tau)$*) Existeix un espai vectorial $E \otimes F$ i una aplicació $\tau: E \times F \rightarrow E \otimes F$ que compleixen 1) i 2).

DEMOSTRACIÓ. Si volem que es compleixi 2), $E \otimes F$ haurà de tenir dimensió nm . Prenguem, doncs, com a $E \otimes F$, un espai vectorial qualsevol de dimensió nm . Prenguem $\{\varepsilon_{i,j}\}_{i=1\dots n; j=1\dots m}$ una base qualsevol de $E \otimes F$; prenguem una base $\{e_i\}$ de E i una base $\{v_j\}$ de F . Definim τ com l'aplicació bilineal tal que $\tau(e_i, v_j) = \varepsilon_{ij}$. Per a demostrar que aquesta τ compleix 2), sigui $\{e'_i\}$ una altra base de E i $\{v'_j\}$ una altra base de F ; hauríem de veure que $\{\tau(e'_i, v'_j)\}$ és base de $E \otimes F$. Això és un exercici elemental d'àlgebra lineal que deixem al lector. ■

Definició i notacions. Anomenem producte tensorial dels espais E i F l'espai $E \otimes F$. Donats $x \in E$, $y \in F$, anomenarem producte tensorial de x i y l'element $\tau(x, y) \in E \otimes F$. Designarem aquest element per $x \otimes y$; és a dir, $x \otimes y = \tau(x, y)$. Amb aquesta notació, la condició de bilinealitat de τ s'escriurà així:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \otimes y &= x_1 \otimes y + x_2 \otimes y \\ x \otimes (y_1 + y_2) &= x \otimes y_1 + x \otimes y_2 \\ (\lambda x) \otimes y &= x \otimes (\lambda y) = \lambda(x \otimes y), \text{ on } \lambda \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

La construcció que hem fet partint de dos espais vectorials E i F es pot generalitzar al cas de s espais vectorials $E_1, \dots, E_s$. En aquest cas construiríem, igual que abans, un parell $(E_1 \otimes \dots \otimes E_s, \tau)$, on $E_1 \otimes \dots \otimes E_s$ seria un nou espai vectorial i τ una aplicació de $E_1 \times \dots \times E_s$ en $E_1 \otimes \dots \otimes E_s$ amb les propietats següents:

- 1) τ és multilinear.
- 2) Si $\{e_{i_1}\}$ és una base de E_1 , $i_1 = 1 \dots n_1$, on $n_1 = \dim E_1$, si $\{v_{i_2}\}$ és una base de E_2 , $i_2 = 1 \dots n_2$, on $n_2 = \dim E_2$, ..., si $\{w_{i_s}\}$ és una base de E_s , $i_s = 1 \dots n_s$, on $n_s = \dim E_s$, llavors $\{\tau(e_{i_1}, v_{i_2}, \dots, w_{i_s})\}$, quan i_1 varia de 1 a $n_1, \dots, i_s$ varia de 1 a n_s , és base de $E_1 \otimes \dots \otimes E_s$.

Com en el cas de dos espais, provaríem la unicitat (llevat d'isomorfismes) d'un tal parell $(E_1 \otimes \dots \otimes E_s, \tau)$ i designaríem per $x_1 \otimes \dots \otimes x_s$ l'element

$\tau(x_1, \dots, x_s)$, qualssevol que siguin $x_1 \in E_1, \dots, x_s \in E_s$. Com que $\tau(e_{i_1}, v_{i_2}, \dots, w_{i_s})$ ho escrivim $e_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes w_{i_s}$, i com que per la propietat 2) això forma una base de $E_1 \otimes \dots \otimes E_s$, tot element t de $E_1 \otimes \dots \otimes E_s$ s'escriurà

$$t = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_s=1}^{n_s} t^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes w_{i_s}.$$

Quan no hi hagi confusió possible, ometrem els sumatoris i escriurem simplement

$$t = t^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes w_{i_s}.$$

2 Tensors contravariants i covariants

Sigui E un espai vectorial i E^* el seu dual. Designarem per $\otimes^k E$ la k -èssima potència tensorial de E , és a dir, $E \otimes \dots \otimes E$ (k cops). Formem l'espai vectorial $(\otimes^k E) \otimes (\otimes^r E^*)$. Els elements d'aquest espai són anomenats tensors k vegades contravariants i r vegades covariants sobre E . Sigui $\{e_1 \dots e_n\}$ una base de E i $\{e^1 \dots e^n\}$ la seva base dual. Tot element de $(\otimes^k E) \otimes (\otimes^r E^*)$ s'escriurà

$$t = t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}.$$

Identificació de $E \otimes E^*$ amb l'espai $\mathcal{L}(E, E)$.

Sigui $\mathcal{L}(E, E)$ l'espai d'aplicacions lineals de E en E .

Proposició 1.4 *Sigui $\tau: E \times E^* \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$ l'aplicació definida de la manera següent: $\tau(x, y')(z) = y'(z)x$. (Observem que si $z \in E$, $y'(z) \in \mathbf{R}$ i $y'(z)x \in E$.) L'aplicació τ així definida compleix les propietats 1) i 2) de l'apartat 1.*

DEMOSTRACIÓ. Evidentment τ és bilineal. Sigui $\{e_i\}$ base de E i $\{v^j\}$ base de E^* . Hem de veure que els elements $\varepsilon_{ij} \in \mathcal{L}(E, E)$ donats per $\varepsilon_{ij}(z) = v^j(z)e_i$ són base de $\mathcal{L}(E, E)$ la qual cosa deixem al lector com exercici d'àlgebra lineal. ■

En virtut de la proposició 1.2 podem identificar $E \otimes E^*$ amb $\mathcal{L}(E, E)$ i el producte tensorial $x \otimes y'$ amb l'aplicació lineal $z \rightarrow y'(z)x$.

Identificació de $E^* \otimes E^*$ amb l'espai $\mathcal{L}(E, E; \mathbf{R})$.

Sigui $\mathcal{L}(E, E; \mathbf{R})$ l'espai d'aplicacions bilineals de $E \times E$ en $\mathbf{R}$.

Proposició 1.5 Sigui $\tau: E^* \times E^* \rightarrow \mathcal{L}(E, E; \mathbf{R})$ l'aplicació definida de la manera següent: $\tau(x', y')(z, w) = x'(z)y'(w)$. L'aplicació τ compleix les propietats 1) i 2) de l'apartat 1.

DEMOSTRACIÓ. Exercici elemental. ■

En virtut de la proposició 1.2 podem identificar $E^* \otimes E^*$ amb $\mathcal{L}(E, E; \mathbf{R})$ i el producte tensorial $x' \otimes y'$ amb l'aplicació bilineal $(z, w) \rightarrow x'(z)y'(w)$. Anàlogament es pot identificar $\otimes^k E^*$ amb $\mathcal{L}(E, \dots^{(k)} \dots E; \mathbf{R})$.

Identificació de $E \otimes (\otimes^k E^*)$ amb l'espai $\mathcal{L}(E, \dots^{(k)} \dots, E; E)$.

Sigui $\mathcal{L}(E, \dots^{(k)} \dots, E; E)$ l'espai d'aplicacions multilineals de $E \times \dots^{(k)} \dots \times E$ en E . Sigui $\tau: E \times E^* \times \dots^{(k)} \dots \times E^* \rightarrow \mathcal{L}(E, \dots^{(k)} \dots, E; E)$ l'aplicació definida per

$$\tau(x, y'_1, \dots, y'_k)(z_1 \dots z_k) = y'_1(z_1) \dots y'_k(z_k)x.$$

Es demostra que τ compleix propietats anàlogues a 1) i 2) de l'apartat 1. Això permet identificar $E \otimes (\otimes^k E^*)$ amb $\mathcal{L}(E, \dots^{(k)} \dots, E; E)$ i $x \otimes y'_1 \otimes \dots \otimes y'_k$ amb l'aplicació multilinear $(z_1 \dots z_k) \rightarrow y'_1(z_1) \dots y'_k(z_k)x$.

3 Propietat universal del producte tensorial

Siguin $E_1, \dots, E_s$ i F espais vectorials.

Proposició 1.6 Donada una aplicació multilinear $f: E_1 \times \dots \times E_s \rightarrow F$, existeix una única aplicació lineal $\tilde{f}: E_1 \otimes \dots \otimes E_s \rightarrow F$ que fa commutatiu el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_1 \otimes \dots \otimes E_s & & \\ \tau \uparrow & \searrow \tilde{f} & \\ E_1 \times \dots \times E_s & \xrightarrow{f} & F, \end{array}$$

on τ és l'aplicació $\tau(x_1, \dots, x_s) = x_1 \otimes \dots \otimes x_s$.

DEMOSTRACIÓ. Sigui $\{e_{i_1}\}$ una base de E_1 , $i_1 = 1 \dots n_1$. Sigui $\{v_{i_2}\}$ una base de E_2 , $i_2 = 1 \dots n_2$, ... Sigui $\{w_{i_s}\}$ base de E_s , $i_s = 1 \dots n_s$. Com que $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes w_{i_s}\}_{i_1=1, \dots, n_1; \dots; i_s=1, \dots, n_s}$ és base de $E_1 \otimes \dots \otimes E_s$, la condició de la commutativitat del diagrama determina $\tilde{f}$ de manera única. ■

4 Contraccions tensorials

Sigui E un espai vectorial. Considerem l'espai $(\otimes^k E) \otimes (\otimes^r E^*)$ de tensors k vegades contravariants i r vegades covariants. Donat un parell d'índexs (i, j) , amb $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq r$, considerem l'aplicació

$$E \times \dots^{(k)} \dots \times E \times E^* \times \dots^{(r)} \dots \times E^* \xrightarrow{f} (\otimes^{k-1} E) \otimes (\otimes^{r-1} E^*)$$

definida per

$$(x_1 \dots x_k, y'_1 \dots y'_r) \rightarrow y'_j(x_i) x_1 \otimes \dots \otimes \hat{x}_i \otimes \dots \otimes x_k \otimes y_1 \otimes \dots \otimes \hat{y}_j \otimes \dots \otimes y_r,$$

on els signes $\hat{x}_i$, $\hat{y}_j$ indiquen que s'han suprimit x_i i y_j . Aquesta aplicació és multilinear. En virtut de la proposició 1.6, existirà una única

$$(\otimes^k E) \otimes (\otimes^r E^*) \xrightarrow{\tilde{f}} (\otimes^{k-1} E) \otimes (\otimes^{r-1} E^*)$$

que fa commutatiu el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\otimes^k E) \otimes (\otimes^r E^*) & & \\ \tau \uparrow & \searrow \tilde{f} & \\ E \times \dots^{(k)} \dots E \times E^* \times \dots^{(r)} \dots E & \xrightarrow{f} & (\otimes^{k-1} E) \otimes (\otimes^{r-1} E^*). \end{array}$$

Anomenarem contracció dels índexs (i, j) , i designarem per C_j^i , el morfisme $\tilde{f}$ així construït.

Si $e_1 \dots e_n$ és base de E i $e^1 \dots e^n$ la seva base dual, C_j^i aplicarà $e_{s_1} \otimes \dots \otimes e_{s_k} \otimes e^{u_1} \otimes \dots \otimes e^{u_r}$ en $\delta_{s_i u_j} e_{s_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{s_i} \otimes \dots \otimes e_{s_k} \otimes e^{u_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}^{u_j} \otimes \dots \otimes e^{u_r}$, on $\delta_{s_i u_j}$ és el símbol de Kronecker que val 0 si $s_i \neq u_j$ i 1 si $s_i = u_j$. Sigui t un element qualsevol de $(\otimes^k E) \otimes (\otimes^r E^*)$; t s'escriurà

$$t = t_{u_1 \dots u_r}^{s_1 \dots s_k} e_{s_1} \otimes \dots \otimes e_{s_k} \otimes e^{u_1} \otimes \dots \otimes e^{u_r}.$$

Es diu que $t_{u_1 \dots u_r}^{s_1 \dots s_k}$ són les components de t en la base $e_1 \dots e_n$. Llavors

$$C_j^i(t) = \delta_{s_i u_j} t_{u_1 \dots u_r}^{s_1 \dots s_k} e_{s_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{s_i} \otimes \dots \otimes e_{s_k} \otimes e^{u_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}^{u_j} \otimes \dots \otimes e^{u_r}.$$

Les components de $C_j^i(t)$ seran, doncs, $\delta_{s_i u_j} t_{u_1 \dots u_r}^{s_1 \dots s_k}$. És a dir, s'ha de fer l'índex s_i igual a u_j (perquè altrament $\delta_{s_i u_j}$ és nul) i sumar. Això es pot posar de la manera següent:

$$\sum_v t_{u_1 \dots (v)_j \dots u_r}^{s_1 \dots (v)_i \dots s_k},$$

on $(v)_i$ vol dir que s'ha posat l'índex v en el lloc i .

5 Tensors simètrics i antisimètrics

Els conceptes de tensor simètric i tensor antisimètric que anem a definir només tindran sentit en tensors purs (totalment contravariants o totalment covariants). Situem-nos, per exemple, en el marc dels tensors contravariants. Designem per S_r el grup de totes les permutacions dels elements $\{1 \dots r\}$. Donat $\sigma \in S_r$, considerem l'aplicació multilinear (que tornarem a designar per σ), $\sigma: E \times \dots \times E \rightarrow \otimes^r E$, definida per $\sigma(x_1, \dots, x_r) = x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(r)}$. En virtut de la propietat universal, existirà una única $\tilde{\sigma}: \otimes^r E \rightarrow \otimes^r E$ que fa commutatiu el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \otimes^r E & \\ \uparrow & & \searrow \tilde{\sigma} \\ E \times \dots \times E & \xrightarrow{\sigma} & \otimes^r E. \end{array}$$

Per tal de no recarregar la notació, fent abús de llenguatge, tornarem a designar per σ l'aplicació $\tilde{\sigma}$. Definim la simetrització S i l'antisimetrització A com les aplicacions lineals $\otimes^r E \rightarrow \otimes^r E$ donades per

$$S(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma(t); \quad A(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) \sigma(t),$$

on $\varepsilon(\sigma)$ indica el signe de la permutació σ .

Definició 1.7 Un tensor $t \in \otimes^r E$ es diu *simètric* si és invariant per S , és a dir, si $S(t) = t$. t es diu *antisimètric* si és invariant per A .

Proposició 1.8 Si $t \in \text{Imatge de } S$, per a tot $\tau \in S_r$ es compleix $\tau(t) = t$.

DEMOSTRACIÓ. Tindrem $t = S(u) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} \sigma(u)$. $\tau(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} \tau \sigma(u)$. Posem $\sigma' = \tau \sigma$. Quan σ varia en tot S_r i τ és fix, σ' varia en tot S_r . Per tant,

$$\tau(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma'} \sigma'(u) = S(u) = t. \quad \blacksquare$$

Corol·lari 1.9 Designem per Sim_r el subespai de $\otimes^r E$ format pels tensors simètrics. Es compleix $\text{Sim}_r = \text{Imatge de } S$.

DEMOSTRACIÓ. La inclusió $\text{Sim}_r \subset \text{Imatge de } S$ és immediata, ja que si $t \in \text{Sim}_r$, $t = S(t)$. Provem la inclusió contrària. Sigui $t \in \text{Im } S$. En virtut de la proposició 1.8, tindrem

$$S(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\tau} \tau(t) = t. \quad \blacksquare$$

Proposició 1.10 Si $t \in \text{Imatge de } A$, per a tot $\tau \in S_r$ es compleix $\tau(t) = \varepsilon(\tau)t$.

DEMOSTRACIÓ. Anàloga a la de la proposició 1.8. ■

Corol·lari 1.11 Designem per Ant_r el subespai de $\otimes^r E$ format pels tensors antisimètrics. Es compleix $\text{Ant}_r = \text{Imatge de } A$.

DEMOSTRACIÓ. Anàloga a la del corol·lari 1.9. ■

Proposició 1.12 Si $\tau \in S_r$ es compleix $\tau \circ A = A \circ \tau$ i $\tau \circ S = S \circ \tau$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrem, per exemple, que $\tau \circ A = A \circ \tau$. Si $t \in \otimes^r E$, tindrem

$$\begin{aligned} A(\tau t) &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \sigma \tau(t) = \frac{1}{r!} \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma \tau) \sigma \tau t \\ &= \varepsilon(\tau) A(t). \end{aligned}$$

Ara bé, en virtut de la proposició 1.10, $\tau A(t) = \varepsilon(\tau) A(t)$ i, per tant, $A(\tau t) = \tau(A t)$. ■

6 Producte exterior

Donat un espai vectorial E , anomenarem r -èssima potència exterior de E el subespai Ant_r de $\otimes^r E$ de tensors antisimètrics. Aquest subespai serà designat d'ara endavant per $\wedge^r E$. Si $x_1 \dots x_r \in E$, designarem per $x_1 \wedge \dots \wedge x_r$ l'element $A(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) \in \wedge^r E$. En virtut de la proposició 1.12, si τ és una permutació, tindrem $\tau(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = \tau A(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = A(\tau(x_1 \otimes \dots \otimes x_r)) = A(x_{\tau(1)} \otimes \dots \otimes x_{\tau(r)}) = x_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge x_{\tau(r)}$. Combinant això amb la proposició 1.10, tindrem

$$x_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge x_{\tau(r)} = \tau(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = \varepsilon(\tau) x_1 \wedge \dots \wedge x_r.$$

Això té com a conseqüència que si en un producte exterior hi ha dos vectors iguals, el producte exterior és zero. És a dir,

$$x_1 \wedge \dots \wedge x \wedge \dots \wedge x \wedge \dots \wedge x_r = 0.$$

En efecte, suposem que els vectors x que són iguals es troben en els llocs i i j respectivament. Sigui τ la transposició que canvia i en j , j en i , i deixa igual tots els altres índexs. Evidentment,

$$\begin{aligned} x_1 \wedge \dots \wedge x \wedge \dots \wedge x \wedge \dots \wedge x_r &= \tau(x_1 \wedge \dots \wedge x \wedge \dots \wedge x \wedge \dots \wedge x_r) \\ &= \varepsilon(\tau) x_1 \wedge \dots \wedge x \wedge \dots \wedge x \wedge \dots \wedge x_r. \end{aligned}$$

Com que $\varepsilon(\tau) = -1$, això implica que l'element $x_1 \wedge \dots \wedge x \wedge \dots \wedge x \wedge \dots \wedge x_r$ és igual al seu oposat. Per tant,

$$x_1 \wedge \dots \wedge x \wedge \dots \wedge x \wedge \dots \wedge x_r = 0.$$

Proposició 1.13 $\wedge^r E$ és un subespai vectorial de $\otimes^r E$ de dimensió $\binom{n}{r}$, on n és la dimensió de E .

DEMOSTRACIÓ. Sigui $e_1 \dots e_n$ una base de E . Basta veure que $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$, per a $i_1 < \dots < i_r$, constitueixen una base de $\wedge^r E$. Vegem en primer lloc que generen $\wedge^r E$. En efecte, $A(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r})$, quan $i_1 \dots i_r$ varien de totes les maneres possibles, generen $\text{Im } A = \wedge^r E$, ja que $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}\}$ és base de $\otimes^r E$. Ara bé, els elements $A(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r})$ que tenen dos subíndexs iguals són nuls. Per tant, els $A(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r})$, quan els $i_1 \dots i_r$ varien de totes les maneres possibles, essent índexs diferents, generen $\wedge^r E$. Ara bé, si $i_1 \dots i_r$ no es troben en ordre creixent, sigui τ la permutació que els posa en ordre creixent. Com que

$$A(e_{\tau(i_1)} \otimes \dots \otimes e_{\tau(i_r)}) = \varepsilon(\tau) A(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}),$$

els $A(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r})$ amb els índexs $i_1 \dots i_r$ en ordre creixent generen $\wedge^r E$.

Provem ara que aquests $A(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r})$ són linealment independents. Suposem

$$\sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda^{i_1 \dots i_r} A(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}) = 0.$$

Per definició d'alternació, a $\otimes^r E$ tindrem

$$\sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda^{i_1 \dots i_r} (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \pm (\text{altres termes permutats})) = 0.$$

Ara bé, dins de $\otimes^r E$, els altres termes permutats són diferents entre ells, i com que els $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}$ amb els índexs variant de qualsevol manera són base de $\otimes^r E$ (en particular, linealment independents), això implica que els $\lambda^{i_1 \dots i_r}$ han de ser nuls. ■

7 Contracció interior d'un element de $\wedge^r E^*$ per un vector $v \in E$

Sigui E un subespai vectorial de dimensió n . Sigui r un nombre enter tal que $1 \leq r \leq n$. Si $w \in \wedge^r E^*$ i $v \in E$, designarem per $i(v)w$ l'element de

$\otimes^{r-1} E^*$ donat per $i(v)w = rC_1^1(v \otimes w)$, on C_1^1 indica la contracció tensorial (1,1). L'element $i(v)w$, que més endavant demostrarem que és de $\wedge^{r-1} E^*$, s'anomena contracció interior de w per v . Observem, primerament, que com que $\wedge^r E^* \subset \otimes^r E^*$, $v \otimes w$ pertany a $E \otimes (\otimes^r E^*)$, i $C_1^1(v \otimes w)$ pertany a $\otimes^{r-1} E^*$.

Demostrem ara que si $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^r$ són r elements de E^* , es compleix

$$i(v)(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^r) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \theta^i(v) \theta^1 \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^i \wedge \dots \wedge \theta^r .$$

En efecte, per definició de producte exterior, tenim

$$\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^r = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) \theta^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \theta^{\sigma(r)} .$$

Per tant,

$$\begin{aligned} i(v)(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^r) &= \frac{r}{r!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) C_1^1 \left(v \otimes \theta^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \theta^{\sigma(r)} \right) \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) \theta^{\sigma(1)}(v) \theta^{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes \theta^{\sigma(r)} . \end{aligned}$$

Per a cada $i \in \Delta_r = \{1, 2, \dots, r\}$ considerem els termes del sumatori $\sum_{\sigma \in S_r}$ anterior per als quals $\sigma(1) = i$. Anomenem f_i l'aplicació

$$\Delta_{r-1} = \{1, 2, \dots, r-1\} \longrightarrow \Delta_r = \{1, 2, \dots, r\}$$

que aplica $1, 2, \dots, r-1$ en $1, 2, \dots, \hat{i}, \dots, r$ respectivament. La imatge de f_i és $\Delta_r - \{i\}$. Per a cada $\sigma \in S_r$ amb $\sigma(1) = i$, considerem la bijecció α de $\Delta_r - \{i\}$ que aplica $\sigma(2), \dots, \sigma(r)$ en $1, 2, \dots, \hat{i}, \dots, r$ posats en l'ordre natural. Sigui τ la bijecció de Δ_{r-1} definida per $\tau = f_i^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ f_i$:

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_{r-1} & \xrightarrow{f_i} & \Delta_r - \{i\} & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & \Delta_r - \{i\} & \xrightarrow{f_i^{-1}} & \Delta_{r-1} \\ & & \{1, 2, \dots, \hat{i}, \dots, r\} & \rightarrow & \sigma(2) \dots \sigma(r) & & \end{array} .$$

Per relacionar el signe de σ com a permutació de Δ_r , i el de τ com a permutació de Δ_{r-1} , observem que quan $i = 1$, $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau)$, i que quan $i = 2$, $\varepsilon(\sigma) = -\varepsilon(\tau)$. En general, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{i+1} \varepsilon(\tau)$. De la definició de τ es té, òbviament, $f_i \tau = \alpha^{-1} f_i$. Per tant, $f_i \tau$ aplica $1, \dots, r-1$ en $\sigma(2), \dots, \sigma(r)$. Després de tot això, doncs, podem descompondre el sumatori $\sum_{\sigma \in S_r}$ de la manera següent:

$$\begin{aligned}
i(v)(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^r) &= \\
&= \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \theta^i(v) \left(\sum_{\tau \in S_{r-1}} \frac{1}{(r-1)!} \varepsilon(\tau) \theta^{f_i \tau(1)} \otimes \dots \otimes \theta^{f_i \tau(r)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \theta^i(v) (\theta^1 \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^i \wedge \dots \wedge \theta^r) .
\end{aligned}$$

Aquesta fórmula prova, a més, que quan w és de la forma $\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^r$, $i(v)w$ pertany a $\wedge^{r-1} E^*$. Com que $\wedge^r E^*$ està engendrat per elements de la forma $\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^r$, $i(v)w$ és de $\wedge^{r-1} E^*$ per a tot $w \in \wedge^r E^*$.

Capítol 2

Geometria diferencial de $\mathbf{R}^n$

1 Camps vectorials en un obert U de $\mathbf{R}^n$

Sigui U un obert de $\mathbf{R}^n$. Un camp vectorial X sobre U consisteix a assignar a cada $x \in U$ un vector $\vec{X}_x$ de $\mathbf{R}^n$. Sovint, si $x = (x^1, \dots, x^n)$, escriurem indistintament $\vec{X}_x$ i $\vec{X}(x^1, \dots, x^n)$ si ens convé posar de manifest les coordenades de x . Si $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ és la base canònica de $\mathbf{R}^n$, tindrem

$$\vec{X}(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n X^i(x^1, \dots, x^n) \vec{e}_i,$$

on les $X^i(x^1, \dots, x^n)$ són funcions ordinàries sobre U . Direm que el camp és de classe C^r o de classe C^∞ si totes les funcions $X^i(x^1, \dots, x^n)$ són C^r o C^∞ respectivament. Si p és un punt de U i f una funció diferenciable (al menys de classe C^1) definida en un entorn de p , designarem per $X_p(f)$ el nombre real

$$X_p(f) = \sum_{i=1}^n X_p^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p.$$

Si f és una funció definida a tot U , designarem per $X(f)$ la funció $p \rightarrow X_p(f)$.

Proposició 2.1 *Si X i Y són dos camps sobre U i $X_p(f) = Y_p(f)$ per a tot f , llavors $X_p = Y_p$.*

DEMOSTRACIÓ. Basta observar que $X_p(x^i) = Y_p(x^i)$, on x^i és la i -èssima funció coordinada. Això es pot escriure $X_p^i = Y_p^i$, i, per tant, $X_p = Y_p$. ■

2 Grups uniparamètrics locals

Donat $\varepsilon > 0$, designarem per I_ε l'interval obert $(-\varepsilon, \varepsilon)$ de $\mathbf{R}$.

Un grup uniparamètric local de transformacions de $\mathbf{R}^n$, de classe C^r , és una aplicació

$$\begin{array}{ccc} \varphi & : & I_\varepsilon \times V \longrightarrow \mathbf{R}^n \\ & & (t, x) \longmapsto \varphi(t, x) = \varphi_t(x) \end{array} ,$$

on V és un obert de $\mathbf{R}^n$, que compleix:

- 1) φ és de classe C^r (observeu que $I_\varepsilon \times V$ és un obert de $\mathbf{R}^{n+1}$).
- 2) Per a tot $t \in I_\varepsilon$, l'aplicació $x \rightarrow \varphi_t(x)$ és un difeomorfisme de classe C^r de V en $\varphi_t(V)$.
- 3) Si $t, s, t+s \in I_\varepsilon$ i si $x, \varphi_s(x) \in V$, llavors

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x)) .$$

- 4) φ_0 és la identitat de V en V .

Motiu del nom. En el cas que I_ε fos tot $\mathbf{R}$, i V tot $\mathbf{R}^n$, per a cada $t \in \mathbf{R}$ tindríem una transformació de $\mathbf{R}^n$ (un difeomorfisme) $x \rightarrow \varphi_t(x)$, i es compliria $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, és a dir, tindríem un grup de difeomorfismes parametritzat per $\mathbf{R}$, $t \rightarrow \varphi_t$.

D'ara endavant, per comoditat, suposarem que els grups uniparamètrics dels quals parlem són C^∞ .

A tot grup uniparamètric local

$$\varphi_t: I_\varepsilon \times V \longrightarrow \mathbf{R}^n ,$$

se li associa el camp vectorial X sobre l'obert V que en cada punt $x \in V$ val

$$\left(\frac{d\varphi_t(x)}{dt} \right)_{t=0} ,$$

que evidentment és C^∞ si φ_t ho era. La següent proposició ens diu que, recíprocament, tot camp procedeix d'un grup uniparamètric local per aquest procediment.

Proposició 2.2 *Sigui X un camp vectorial sobre un obert U de $\mathbf{R}^n$. Fixat un punt $x_0 \in U$, existeix un entorn V de x_0 i un grup uniparamètric local de transformacions $\varphi: I_\varepsilon \times V \rightarrow \mathbf{R}^n$, tal que el camp sobre V corresponent a aquest grup uniparamètric local és X .*

DEMOSTRACIÓ. Siguin $X^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1 \dots n$, les components del camp X en la base canònica de $\mathbf{R}^n$. Considerem el sistema d'equacions diferencials ordinàries

$$\frac{d\varphi^i}{dt} = X^i(\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)) \quad i = 1 \dots n.$$

Pel teorema d'existència i unicitat de solucions i dependència diferenciable de les condicions inicials, fixat $x_0 \in U$, existiran $\varepsilon' i \delta > 0$ tals que per a tot $x = (x^1, \dots, x^n)$ que compleixi $|x^i - x_0^i| < \delta$, existeix una única solució $\varphi^i(t, x)$ del sistema, diferenciable en t i x , definida per a $|t| < \varepsilon'$ i tal que $\varphi^i(0, x^1, \dots, x^n) = x^i$. Prenguem $V' = \{x \text{ tals que } |x^i - x_0^i| < \delta\}$ i definim la nostra $\varphi: I_{\varepsilon'} \times V' \rightarrow \mathbf{R}^n$ per $(t, x) \rightarrow (\varphi^i(t, x))$.

Per tal de provar que es compleix 3) de la definició de grup uniparamètric, fixem s i considerem

$$\begin{aligned} f^i(t) &= \varphi^i(t + s, x) \\ g^i(t) &= \varphi^i(t, \varphi_s(x)). \end{aligned}$$

Pel fet de ser solucions del mateix sistema amb les mateixes condicions inicials, hauran de coincidir.

Òbviament $\varphi_0 = \text{id}$.

Per 3) tindrem $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_0 = \text{id}$. Això ens diu que φ_{-t} és la inversa de φ_t en els punts x en què $\varphi_{-t} \in V'$ i $\varphi_t(x) \in V'$. Sigui V un entorn de x_0 contingut a V' i $\varepsilon \leq \varepsilon'$ tals que $\varphi_{-t}(x) \in V'$ i $\varphi_t(x) \in V'$ per a qualsevol $x \in V$ i qualsevol t tal que $|t| < \varepsilon$. Llavors $\varphi: I_\varepsilon \times V \rightarrow \mathbf{R}^n$ complirà totes les condicions. ■

3 Derivada covariant i claudàtor de dos camps

Sigui X i Y dos camps vectorials diferenciables en un obert U de $\mathbf{R}^n$. Es defineix la derivada del camp Y respecte al camp X com el camp que assigna a cada punt $p \in U$ la derivada direccional de Y en la direcció de X_p , i es designa per $\nabla_X Y$. Sigui $t \rightarrow x(t)$ una petita corba tal que $x(0) = p$ i que tingui X_p com a vector tangent en el punt p ($\dot{x}(0) = X_p$). Llavors

$$(\nabla_X Y)_p = \frac{d}{dt} \vec{Y}(x^1(t), \dots, x^n(t))_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \vec{Y}}{\partial x^i} \right)_p X_p^i.$$

Una observació important és que per conèixer $(\nabla_X Y)_p$ només cal conèixer X_p i conèixer Y sobre una petita corba que passi per p i tingui X_p com a vector tangent en aquest punt. És a dir, no cal que coneguem X, Y en tot un entorn de p .

Es defineix el claudàtor de dos camps X, Y com el camp donat per $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, i es designa per $[X, Y]$.

Si $e_1 \dots e_n$ és la base canònica de $\mathbf{R}^n$, tindrem

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j} \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} X^i e_j,$$

per la qual cosa es té

$$[X, Y] = \sum_j \sum_i \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) e_j.$$

De les definicions es desprenen immediatament les següents propietats de la derivada covariant i del claudàtor:

- 1) $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$.
- 2) $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$.
- 3) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$, on f és qualsevol funció.
- 4) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$.
- 5) $Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$, on g és el producte escalar ordinarí de $\mathbf{R}^n$. (Tingueu en compte que si X, Y són camps, $g(X, Y)$ és una funció. Llavors $Z(g(X, Y))$ vol dir Z aplicat a la funció $g(X, Y)$.)
- 6) $[X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y]$.
- 7) $[X, Y] = -[Y, X]$.
- 8) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$. (Jacobi)

Proposició 2.3 Si f és una funció, es compleix

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

DEMOSTRACIÓ.

$$\begin{aligned} X(Y(f)) &= \sum_{i,j} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \\ &= \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j} X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = \sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j},$$

ja que els termes en les derivades segones es destrueixen (miracle!). Així la proposició queda provada. ■

4 Aplicació lineal tangent i interpretació del claudàtor

Si φ és una aplicació diferenciable d'un obert U de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$, $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^m$, i $p \in U$ l'aplicació lineal tangent de φ en el punt p (que es designa per $(d\varphi)_p$, per $(\varphi_*)_p$ o per $\varphi'(p)$) és l'aplicació lineal $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ que té com a matriu $(\partial\varphi^i/\partial x^j)_p$ en les bases canòniques de $\mathbf{R}^n$ i $\mathbf{R}^m$.

Siguin X i Y dos camps vectorials definits en un obert U de $\mathbf{R}^n$. Fixem un punt $p \in U$. Sigui φ_t el grup uniparamètric local associat al camp X en un entorn de p . Es pot provar (ho deixem com a exercici de càlcul) que

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(Y_p - \varphi'_t(\varphi_{-t}(p)) Y_{\varphi_{-t}(p)} \right).$$

5 Formes diferencials i diferencial exterior

Una p -forma diferencial φ en un obert U de $\mathbf{R}^n$ consisteix a assignar a cada $x \in U$ un element $\varphi_x \in \wedge^p(\mathbf{R}^n)^*$. Per comoditat de notació, posarem indistintament φ_x , $\varphi(x)$ o bé $\varphi(x^1 \dots x^n)$. Si $e_1 \dots e_n$ és la base canònica de $\mathbf{R}^n$ i $e^1 \dots e^n$ la base dual, tindrem

$$\varphi_x = \varphi(x^1 \dots x^n) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \varphi_{i_1 \dots i_p}(x^1 \dots x^n) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}, \quad (2.1)$$

on $\varphi_{i_1 \dots i_p}(x^1 \dots x^n)$ són funcions ordinàries de $x^1 \dots x^n$, que s'anomenen components de φ .

La forma φ es diu diferenciable (de classe C^r) si totes les seves components són diferenciables (de classe C^r).

Si f és una funció diferenciable definida sobre U , s'anomena diferencial de f , i es designa per df , la 1-forma diferencial que a cada punt $x_0 \in U$ li assigna l'aplicació lineal de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$ (element del dual) que a cada $(v^1, v^2, \dots, v^n)$ de $\mathbf{R}^n$ li fa correspondre l'escalar $\sum (\partial f / \partial x^i)_{x_0} v^i$ (derivada de f en el punt x_0 en

la direcció del vector $\vec{v}$). Si expressem df en funció de la base dual $\{e^i\}$ de la base canònica $\{e_i\}$ de $\mathbf{R}^n$, tindrem:

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} e^i.$$

Aplicant aquesta definició a una funció coordenada, x^j , es té $dx^j = \sum_i \delta_{ij} e^i = e^j$, per la qual cosa tindrem

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \quad (2.2)$$

L'expressió (2.1) d'una p -forma φ s'escriurà, doncs, de manera equivalent,

$$\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \varphi_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \quad (2.3)$$

A vegades resulta incòmode sumar només els índexs $i_1 \dots i_p$ ordenats de manera creixent. Observem, però, que de moment, les components $\varphi_{i_1 \dots i_p}$ només estan definides quan $i_1 < \dots < i_p$.

Convindrem que $\varphi_{i_1 \dots i_p}$, per a índexs qualssevol, és zero quan hi hagi dos índexs iguals. Si $i_1 \dots i_p$ són diferents, siguin $j_1 \dots j_p$ els mateixos índexs ordenats de menor a major. Llavors convindrem que $\varphi_{i_1 \dots i_p} = \pm \varphi_{j_1 \dots j_p}$, on el signe $\pm$ és precisament el signe de la permutació que fa passar de $i_1 \dots i_p$ a $j_1 \dots j_p$. Amb aquesta convenció $\varphi_{i_1 \dots i_p}$ està definit per a tot sistema d'índexs i és antisimètric en els índexs. Llavors tenim:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \varphi_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} = \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n \varphi_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

Per veure aquesta última igualtat, basta observar que a l'últim membre, quan hi ha dos índexs iguals, el terme corresponent és zero, i quan els $i_1 \dots i_p$ són diferents, llavors el canvi de signe que es fa per passar de $\varphi_{i_1 \dots i_p}$ a $\varphi_{j_1 \dots j_p}$ és el mateix que el que es fa per passar de $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ a $dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$.

Resumint,

$$\varphi = \frac{1}{p!} \varphi_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad (2.4)$$

amb les $\varphi_{i_1 \dots i_p}$ antisimètriques en els índexs. (Hem omitit el sumatori, tal com vàrem convenir al capítol 1.)

Si φ és una p -forma diferencial expressada com (2.4), es defineix la diferencial exterior de φ , que es designa per $d\varphi$, com

$$d\varphi = \frac{1}{p!} d\varphi_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Tenint present l'expressió de la diferencial d'una funció, es té

$$d\varphi = \frac{1}{p!} \frac{\partial \varphi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \quad (2.5)$$

Ara bé, els coeficients $\partial \varphi_{i_1 \dots i_p} / \partial x^j$ no són antisimètrics en $j, i_1 \dots i_p$, i per tant, no seran les components de $d\varphi$. Observem que com que $dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ sí que és antisimètric, es tindrà

$$dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \frac{1}{(p+1)!} \varepsilon_{k_1 \dots k_{p+1}}^{ji_1 \dots i_p} dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_{p+1}}, \quad (2.6)$$

on $\varepsilon_{k_1 \dots k_{p+1}}^{ji_1 \dots i_p}$ vol dir 0 quan a $k_1 \dots k_{p+1}$ hi ha dos índexs iguals o quan a $ji_1 \dots i_p$ hi ha dos índexs iguals o quan els conjunts $\{ji_1 \dots i_p\}$ i $\{k_1 \dots k_p\}$ són diferents. Quan aquests conjunts coincideixen, $\varepsilon_{k_1 \dots k_{p+1}}^{ji_1 \dots i_p}$ vol dir el signe de la permutació que fa passar de $ji_1 \dots i_p$ a $k_1 \dots k_{p+1}$. Substituint (2.6) a (2.5) obtenim

$$d\varphi = \frac{1}{(p+1)!} \left(\frac{1}{p!} \varepsilon_{k_1 \dots k_{p+1}}^{ji_1 \dots i_p} \frac{\partial \varphi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^j} \right) dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_{p+1}}. \quad (2.7)$$

Observem, doncs, que les components de $d\varphi$ —ara sí, antisimètriques en els índexs— són

$$(d\varphi)_{k_1 \dots k_{p+1}} = \frac{1}{p!} \varepsilon_{k_1 \dots k_{p+1}}^{ji_1 \dots i_p} \frac{\partial \varphi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^j}. \quad (2.8)$$

Una propietat important de la diferencial exterior que es dedueix directament de la definició (2.5) és la següent: si φ i ψ són dues formes diferencials de graus respectius p i q , es compleix

$$d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge d\psi.$$

Una altra propietat important és que per a qualsevol p -forma φ es té $d(d\varphi) = 0$, és a dir, $d^2 = 0$. En efecte,

$$d^2\varphi = \frac{1}{p!} \frac{\partial^2 \varphi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k \partial x^j} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

i $\partial^2 \varphi_{i_1 \dots i_p} / \partial x^k \partial x^j$ és simètric en k, j , mentre que $dx^k \wedge dx^j$ és antisimètric en els mateixos índexs. Sempre que es produeix una situació com aquesta, l'expressió s'anul·la. En efecte,

$$\sum_{k,j} \frac{\partial^2 \varphi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k \partial x^j} dx^k \wedge dx^j = (\text{canviant de nom els índexs, que són índexs de sumació}) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \varphi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^j \partial x^k} dx^j \wedge dx^k = - \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \varphi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^j \partial x^k} dx^k \wedge dx^j.$$

I si un element d'un espai vectorial és igual al seu oposat, aquest element és nul.

6 Imatge inversa d'una p -forma per una aplicació

Sigui f una aplicació diferenciable d'un obert U de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$, $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$. Si anomenem $(x^1 \dots x^n)$ les coordenades canòniques de $\mathbf{R}^n$ i $(y^1 \dots y^m)$ les de $\mathbf{R}^m$, f s'expressarà així:

$$y^i = f^i(x^1 \dots x^n); \quad i = 1 \dots m. \quad (2.9)$$

Sigui φ una p -forma sobre $\mathbf{R}^m$,

$$\varphi = \frac{1}{p!} \varphi_{i_1 \dots i_p}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p}.$$

Si en aquesta expressió se substitueixen les y per les seves expressions (2.9) en funció de les x , s'obindrà una p -forma sobre U que s'anomena imatge inversa de φ per f i es designa per $f^*(\varphi)$. Com que $dy^i = (\partial f^i / \partial x^j) dx^j$, tindrem

$$f^*(\varphi) = \frac{1}{p!} \varphi_{i_1 \dots i_p}(f(x)) \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial f^{i_p}}{\partial x^{j_p}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}.$$

Fixem-nos que en aquesta expressió els coeficients no són antisimètrics en $j_1 \dots j_p$. Si es vol una expressió amb coeficients antisimètrics, pel mateix procediment utilitzat a l'apartat anterior, tindrem

$$f^*(\varphi) = \frac{1}{p!} \left(\frac{1}{p!} \varepsilon_{k_1 \dots k_p} \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial f^{i_p}}{\partial x^{j_p}} \varphi_{i_1 \dots i_p}(f(x)) \right) dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_p}.$$

Proposició 2.4 $f^*(d\varphi) = df^*(\varphi)$.

DEMOSTRACIÓ. Càlcul immediat. ■

Capítol 3

Corbes i superfícies de $\mathbf{R}^3$

1 Corbes

1.1 Definició, vector tangent, paràmetre arc

Una corba parametritzada de $\mathbf{R}^3$ és un parell $(V, \vec{x})$, on V és un interval de $\mathbf{R}$ i $\vec{x}$ és una aplicació

$$\begin{array}{ccc} \vec{x}: & V & \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ & t & \longrightarrow \vec{x}(t) \end{array}$$

diferenciable i tal que $d\vec{x}(t)/dt \neq 0$ per a tot $t \in V$. El vector $d\vec{x}(t)/dt$ s'anomena vector tangent en t . A vegades designarem per $\dot{x}(t)$ el vector $d\vec{x}(t)/dt$.

Si a i b són dos elements de V , el nombre $\int_a^b \|\dot{x}(t)\| dt$ s'anomena longitud de l'arc de corba comprès entre $x(a)$ i $x(b)$. Justifiquem aquesta definició. Sigui $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ una partició de l'interval $[a, b]$. La longitud de la poligonal determinada pels punts $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n)$ és, òbviament,

$$\sum_{i=1}^n \|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^3 (x^j(t_i) - x^j(t_{i-1}))^2}.$$

Pel teorema del valor mig,

$$\begin{aligned} x^1(t_i) - x^1(t_{i-1}) &= \dot{x}^1(\alpha_i)(t_i - t_{i-1}) \\ x^2(t_i) - x^2(t_{i-1}) &= \dot{x}^2(\beta_i)(t_i - t_{i-1}) \\ x^3(t_i) - x^3(t_{i-1}) &= \dot{x}^3(\gamma_i)(t_i - t_{i-1}), \end{aligned}$$

on $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ són punts compresos entre t_{i-1} i t_i . Per tant,

$$\sum_{i=1}^n \|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}^1(\alpha_i)^2 + \dot{x}^2(\beta_i)^2 + \dot{x}^3(\gamma_i)^2} (t_i - t_{i-1}) .$$

D'aquí es desprèn que l'extrem superior de les longituds de totes les poligonals corresponents a particions de $[a, b]$ és (per definició d'integral) $\int_a^b \|\dot{x}(t)\| dt$.

Siguin $(V, \vec{x})$ i $(V', \vec{y})$ dues corbes parametritzades de $\mathbf{R}^3$. Direm que aquestes dues corbes són equivalents si existeix un difeomorfisme

$$\begin{aligned} u : V &\longrightarrow V' \\ t &\longrightarrow u(t) \end{aligned}$$

tal que $\vec{x}(t) = \vec{y}(u(t))$ (o sigui, $\vec{x} = \vec{y} \circ u$). El difeomorfisme u l'anomenarem canvi de paràmetre. Si $(V, \vec{x})$ és una corba parametritzada de $\mathbf{R}^3$ i t_0 és un punt arbitrari de V , anomenem $s(t)$ la longitud de l'arc de corba comprès entre $x(t_0)$ i $x(t)$, és a dir,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{x}(\xi)\| d\xi . \quad (3.1)$$

Com que $ds/dt = \|\dot{x}(t)\| > 0$, (3.1) donarà un canvi de paràmetre. El paràmetre s així definit s'anomena paràmetre d'arc. Si reparametritzem la corba $\vec{x}(t)$ per l'arc s , tindrem $\|d\vec{x}(s)/ds\| = 1$. En efecte, $d\vec{x}/ds = (d\vec{x}/dt)(dt/ds)$. Però $dt/ds = 1/(ds/dt) = 1/\|\dot{x}(t)\|$. Per tant, $\|d\vec{x}/ds\| = \|d\vec{x}/dt\|/\|d\vec{x}/dt\| = 1$.

El paràmetre arc depèn, en principi, de la parametrització inicial $\vec{x}(t)$ utilitzada i de l'origen t_0 que s'hagi pres. Siguin s i s' dos paràmetres arc de la mateixa corba. Tindrem $d\vec{x}/ds = (d\vec{x}/ds')(ds'/ds)$. Prenent normes, deduïm que $|ds'/ds| = 1$. O sigui, $ds'/ds = \pm 1$. D'on, $s' = \pm s + \text{constant}$. Això equival a fer un canvi d'origen de s i a canviar, possiblement, el sentit de recorregut de la corba. Per tant, en la definició del paràmetre arc hi ha aquestes dues indeterminacions. De fet, el raonament anterior mostra que per a qualsevol paràmetre u que compleixi $\|d\vec{x}(u)/du\| = 1$ es té $u = \pm s + \text{constant}$, on s és un paràmetre arc. Per tant, u és un paràmetre arc.

1.2 Ordre de contacte

Siguin $(V, \vec{x})$ i $(V', \vec{y})$ dues corbes parametritzades de $\mathbf{R}^3$. Suposem que $V \cap V' \neq \emptyset$. Sigui $t_0 \in V \cap V'$. Una primera definició intuïtiva d'ordre de contacte és la següent: direm que $(V, \vec{x})$ i $(V', \vec{y})$ tenen un contacte d'ordre $\geq r$ a t_0 si el límit de $(\vec{x}(t) - \vec{y}(t))/(t - t_0)^r$ és zero quan t tendeix a t_0 . Això vol dir que el

numerador és un infinitesimal més gran que $(t - t_0)^r$ en el punt t_0 . Òbviament, llavors també s'anul·larà el límit de $(\vec{x}(t) - \vec{y}(t))/(t - t_0)^k$ per a tot k tal que $0 \leq k \leq r$. Utilitzant la regla de l'Hôpital per a les components de $\vec{x}(t) - \vec{y}(t)$ es veu immediatament que la definició anterior equival al fet que $\vec{x}(t_0) = \vec{y}(t_0)$ i que les r primeres derivades de $\vec{x}(t)$ i de $\vec{y}(t)$ en el punt t_0 coincideixin.

Direm que $(V, \vec{x})$ i $(V', \vec{y})$ tenen un contacte d'ordre exactament r en el punt $t_0 \in V \cap V'$ si coincideixen totes les derivades de $\vec{x}(t)$ i de $\vec{y}(t)$ en el punt t_0 fins a l'ordre r , però no coincideixen les d'ordre $r + 1$. Dit d'una altra manera, quan tenen un contacte d'ordre $\geq r$ i no tenen un contacte d'ordre $\geq r + 1$.

Malauradament, aquesta definició depèn de les parametritzacions particulars de les dues corbes. Per exemple, la paràbola $\vec{x}(t) = (t^2/2, t, 0)$ i la circumferència $\vec{y}(t) = (1 - \cos t, \sin t, 0)$ tenen un contacte d'ordre 2 en $t = 0$ ja que coincideixen les derivades a l'origen de totes dues corbes fins a l'ordre 2, però les derivades d'ordre 3 a l'origen són diferents. En canvi, si fem el canvi de paràmetre $t = u - u^3/6$ a la paràbola i deixem la circumferència amb la mateixa parametrització que tenia abans, les corbes $\vec{x}(u) = ((u - u^3/6)^2/2, u - u^3/6, 0)$ i $\vec{y}(u) = (1 - \cos u, \sin u, 0)$ tenen un contacte d'ordre 3 en el punt $u = 0$.

Adoptarem una definició d'ordre de contacte que no depengui de les parametritzacions particulars de les corbes. Siguin, com abans, $(V, \vec{x})$ i $(V', \vec{y})$ dues corbes parametritzades de $\mathbf{R}^3$, amb $V \cap V' \neq \emptyset$, i suposem que per a un $t_0 \in V \cap V'$ es té $x(t_0) = y(t_0)$. Parametritzem les dues corbes per un paràmetre arc s de tal manera que el punt $p = x(t_0) = y(t_0)$ correspongui al paràmetre $s = 0$ de les dues corbes (recordem que l'arc queda determinat llevat de l'elecció d'origen i de sentit de recorregut). Direm que les dues corbes tenen un contacte d'ordre $r \geq 1$ en el punt p quan es pot elegir un sentit de recorregut de les dues corbes de manera que quan es pren a cada una d'elles el paràmetre arc s determinat per aquest sentit de recorregut i per l'origen p , ambdues corbes tenen un contacte d'ordre $r \geq 1$ en el punt $s = 0$. Observeu que com que suposem $r \geq 1$, les dues corbes tindran el mateix vector tangent en el punt $s = 0$ i, per tant, "el mateix" sentit de recorregut.

1.3 Curvatura i torsió. Fórmules de Frenet

Sigui $\vec{x}(s)$ una corba parametritzada per l'arc. El vector tangent $\vec{T}(s) = d\vec{x}/ds$ té norma 1, tal com hem vist. Això s'escriu $g(\vec{T}(s), \vec{T}(s)) = 1$, on g és el producte escalar usual de $\mathbf{R}^3$. Derivant respecte a s la identitat anterior, tindrem $2g(d\vec{T}/ds, \vec{T}) = 0$, la qual cosa ens diu que el vector $d\vec{T}/ds$ és perpendicular a $\vec{T}$ per a qualsevol valor de s . Quan $d\vec{T}/ds$ és no nul, el vector unitari

$\vec{N} = (d\vec{T}/ds)/\|d\vec{T}/ds\|$ s'anomena normal principal. Tindrem, doncs,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \rho(s)\vec{N}(s),$$

amb $\rho(s) = \|d\vec{T}/ds\|$. El nombre $\rho(s)$ s'anomena curvatura de la corba en s . Observem que $\rho(s)$, per definició, és sempre positiu. Quan $d\vec{T}/ds = 0$, $\vec{N}(s)$ no està definit, però direm que $\rho(s)$ és nul en aquest cas. El significat geomètric de $\rho(s)$ ve donat pel resultat següent.

Teorema 3.1 *Sigui $\vec{x}(s)$ una corba de $\mathbf{R}^3$ parametritzada per l'arc. Sigui s_0 un valor qualsevol del parametre s . Si $\rho(s_0) \neq 0$, existeix una única circumferència de $\mathbf{R}^3$ de radi $R = 1/\rho(s_0)$ que té amb la corba $\vec{x}(s)$ un contacte d'ordre ≥ 2 en s_0 . El radi R d'aquesta circumferència s'anomena radi de curvatura de $\vec{x}(s)$ en s_0 , i el seu centre, centre de curvatura.*

DEMOSTRACIÓ. Per comoditat, fem un canvi d'origen en el paràmetre s , $u = s - s_0$, de manera que s_0 passi a ser el nou origen. Sigui $\vec{y}(u)$ la circumferència que busquem. Les condicions $x(0) = y(0)$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0)$, $\ddot{x}(0) = \ddot{y}(0)$ comporten que la tangent i la normal principal a l'origen de la circumferència que busquem siguin les mateixes que les de la corba $\vec{x}(u)$. Per tant, si $\vec{N}$ és la normal principal de $\vec{x}(u)$ en $u = 0$, el centre de la circumferència que busquem ha d'estar sobre la recta $\vec{x}(0) + \lambda\vec{N}$. Per tant, aquesta circumferència, parametritzada per l'arc, serà

$$\vec{y}(u) = \vec{x}(0) + R\vec{N} - R\cos\frac{u}{R}\vec{N} + R\sin\frac{u}{R}\vec{T},$$

d'on

$$\begin{aligned} y'(u) &= \sin\frac{u}{R}\vec{N} + \cos\frac{u}{R}\vec{T} \\ y''(u) &= \frac{1}{R}\cos\frac{u}{R}\vec{N} - \frac{1}{R}\sin\frac{u}{R}\vec{T}. \end{aligned}$$

Tindrem $y'(0) = \vec{T}$, $y''(0) = \vec{N}/R$. Com que $x''(0) = \rho(0)\vec{N}$, tindrem $\rho(0) = 1/R$. ■

Els valors s del paràmetre per als quals $d\vec{T}/ds \neq 0$ s'anomenen regulars. Si s_0 és un valor regular, existeix un entorn de s_0 format per valors regulars. Si s és regular, el vector normal principal $\vec{N}(s)$ està definit, i si s no és regular, $\vec{N}(s)$ no està definit.

En els punts regulars s'anomena binormal el vector $\vec{B}(s)$ unitari de $\mathbf{R}^3$ caracteritzat per la condició que $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ és una base ortonormal positiva de $\mathbf{R}^3$, $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$, on $\vec{T} \wedge \vec{N}$ indica el producte vectorial de T i N .

El que direm a continuació es refereix només a intervals I en què tots els valors $s \in I$ són regulars. Observem, en primer lloc, que el vector $d\vec{B}/ds$ ha de ser perpendicular a $\vec{B}$. En efecte, derivant respecte a s l'expressió $g(\vec{B}(s), \vec{B}(s)) = 1$, obtenim $2g(d\vec{B}/ds, \vec{B}) = 0$. Derivant $g(\vec{T}, \vec{B}) = 0$, obtenim $g(dT/ds, B) + g(T, dB/ds) = 0$. Però $g(dT/ds, B) = \rho(s)g(N, B) = 0$. Per tant, dB/ds és perpendicular a T . Així doncs, com que dB/ds és perpendicular a T i B , haurà de ser un múltiple escalar de N . Posem

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \tau(s)\vec{N}(s).$$

L'escalar $\tau(s)$ s'anomena torsió. Per interpretar geomètricament aquest nombre, observem que si $\tau(s)$ és idènticament nul, llavors $\vec{B}$ és constant (no depèn de s). El subespai vectorial engendrat per $T(s)$ i $N(s)$ (que és perpendicular a $B(s)$) és llavors constant. Anomenem E aquest subespai. Sigui s_0 un valor qualsevol de l'interval I . Provem que $g(x(s) - x(s_0), B) = 0$ per a tot $s \in I$. En efecte, $dg(x(s) - x(s_0), B)/ds = g(T(s), B) = 0$. Per tant, $g(x(s) - x(s_0), B)$ és constant. Ara bé, quan $s = s_0$ aquest producte escalar és nul. Per tant, $g(x(s) - x(s_0), B) = 0$. Això indica que $x(s) - x(s_0) \in E$ per a qualsevol $s \in I$. O sigui, $\vec{x}(s) \in \vec{x}(s_0) + E$. Veiem, doncs, que la corba $\vec{x}(s)$ està continguda en el pla $\vec{x}(s_0) + E$. Així, doncs, si $\tau(s)$ s'anul·la idènticament, $\vec{x}(s)$ és una corba plana. El recíproc és immediat.

Derivant la identitat $g(\vec{N}(s), \vec{N}(s)) = 1$ s'obté que $d\vec{N}/ds$ és perpendicular a $\vec{N}(s)$. Per tant, $d\vec{N}/ds$ és combinació lineal de $\vec{T}$ i $\vec{B}$. Posem

$$\frac{dN}{ds} = \alpha T + \beta B.$$

$\alpha = g(dN/ds, T) = -g(N, dT/ds)$, ja que $dg(N, T)/ds = 0$. Per tant, $\alpha = -g(N, dT/ds) = -\rho g(N, N) = -\rho$. Anàlogament,

$$\beta = g(dN/ds, B) = -g(N, dB/ds) = -\tau g(N, N) = -\tau.$$

Per tant, $dN/ds = -\rho T - \tau B$. Resumint, tenim

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{x}(s)}{ds} = \vec{T}(s) \\ \frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \rho(s)\vec{N}(s) \\ \frac{d\vec{N}}{ds} = -\rho(s)\vec{T}(s) - \tau(s)\vec{B}(s) \\ \frac{d\vec{B}}{ds} = \tau(s)\vec{N}(s) . \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Les expressions (3.2) s'anomenen fórmules de Frenet.

Per calcular la curvatura i torsió d'una corba per mitjà de (3.2) s'ha de parametritzar la corba pel paràmetre arc, s . Per tal d'evitar això, donarem un mètode pràctic de càlcul de curvatura i torsió d'una corba, quan es parteix d'una parametrització qualsevol.

Proposició 3.2 *Les expressions*

$$\begin{aligned} & \|\dot{x}(t)\|^{-3} \|\dot{x}(t) \wedge \ddot{x}(t)\| \\ & \|\dot{x}(t)\|^{-6} \det(\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ddot{\ddot{x}}(t)) \end{aligned}$$

són invariants per canvi de paràmetre.

DEMOSTRACIÓ. Fem un canvi de paràmetre $t = t(u)$. Tindrem

$$\frac{d\vec{x}(t(u))}{du} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{du}; \quad \frac{d^2x(t(u))}{du^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \left(\frac{dt}{du} \right)^2 + \frac{dx}{dt} \frac{d^2t}{du^2}.$$

Per tant,

$$\frac{dx}{du} \wedge \frac{d^2x}{du^2} = \left(\frac{dt}{du} \right)^3 \frac{dx}{dt} \wedge \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Finalment,

$$\left\| \frac{dx}{du} \right\|^{-3} \left\| \frac{dx}{du} \wedge \frac{d^2x}{du^2} \right\| = \left\| \frac{dx}{dt} \right\|^{-3} \left\| \frac{dx}{dt} \wedge \frac{d^2x}{dt^2} \right\|.$$

Un càlcul anàleg mostra que la segona expressió de la proposició és invariant per canvi de paràmetre. ■

Corollari 3.3 Si $\vec{x}(t)$ és una corba parametritzada per un paràmetre t qualsevol, la curvatura $\rho(t)$ i la torsió $\tau(t)$ en el punt $\vec{x}(t)$ vénen donades per

$$\rho(t) = \|\dot{x}(t)\|^{-3} \|\dot{x}(t) \wedge \ddot{x}(t)\|$$

$$\tau(t) = -\frac{\det(\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ddot{\ddot{x}}(t))}{\|\dot{x}(t) \wedge \ddot{x}(t)\|^2}.$$

DEMOSTRACIÓ. Si fem el canvi de paràmetre $t = t(s)$, on s és el paràmetre arc, tindrem $\|\dot{x}(t)\|^{-3} \|\dot{x}(t) \wedge \ddot{x}(t)\| = \|\dot{x}(s)\|^{-3} \|\dot{x}(s) \wedge \ddot{x}(s)\|$. Però $\|\dot{x}(s)\| = 1$ i $\dot{x}(s) \wedge \ddot{x}(s) = T(s) \wedge \rho(s)N = \rho(s)T \wedge N$. Per tant,

$$\|\dot{x}(t)\|^{-3} \|\dot{x}(t) \wedge \ddot{x}(t)\| = |\rho(s)| \|B\| = |\rho(s)|.$$

Ara bé, com que la curvatura és sempre positiva (per definició), $|\rho(s)| = \rho(s)$. L'expressió de la torsió s'obté de manera anàloga. ■

1.4 La curvatura i torsió determinen la corba, llevat de desplaçaments de $\mathbf{R}^3$

Teorema 3.4 Sigui V un interval de $\mathbf{R}$. Donades dues funcions contínues ρ i τ de V a $\mathbf{R}$, donada una referència fixa de $\mathbf{R}^3$, $\{x_0; e_1, e_2, e_3\}$, ortonormal i positiva, i donat un $s_0 \in V$, existeix una única corba parametritzada de $\mathbf{R}^3$, $\vec{x}: V \rightarrow \mathbf{R}^3$, i tres úniques funcions vectorials diferenciables, $\vec{T}: V \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\vec{N}: V \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\vec{B}: V \rightarrow \mathbf{R}^3$, tals que:

- 1) Per a cada $s \in V$ els vectors $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ constitueixen una base ortonormal positiva de $\mathbf{R}^3$.
- 2) La referència $\{x(s_0); T(s_0), N(s_0), B(s_0)\}$ coincideix amb $\{x_0; e_1, e_2, e_3\}$.
- 3) Es compleixen les equacions (3.2).

DEMOSTRACIÓ. Per comoditat de notació anomenem $e_1(s), e_2(s), e_3(s)$ els vectors $T(s), N(s), B(s)$. Escrivim (3.2) en la forma

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \sum \theta^i(s) \vec{e}_i(s)$$

$$\frac{d\vec{e}_i}{ds} = \sum_j \omega_i^j(s) \vec{e}_j(s),$$

on $\theta^1(s) \equiv 1, \theta^2(s) \equiv 0, \theta^3(s) \equiv 0$ i $(\omega_i^j(s))$ és la matriu antisimètrica

$$\begin{pmatrix} 0 & -\rho & 0 \\ \rho & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Posem $\vec{x}(s) = \sum x^i(s)\vec{e}_i$, $\vec{e}_i(s) = \sum a_i^k(s)\vec{e}_k$, on $\{e_1, e_2, e_3\}$ és la referència fixa donada. El sistema diferencial vectorial anterior equival al sistema següent de 12 equacions escalars:

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{ds} = \sum a_k^i \theta^k \\ \frac{da_i^j}{ds} = \sum \omega_i^k a_k^j. \end{cases}$$

Comencem integrant el sistema lineal $da_i^j/ds = \sum \omega_i^k a_k^j$. La continuïtat de les funcions $\omega_i^k(s)$ és suficient per assegurar l'existència d'una única solució amb les condicions inicials $a_i^j(s_0) = \delta_{kj}$. Observem que aquest sistema es descompon en tres sistemes de la forma $da_i/ds = \sum \omega_i^k a_k$, obtinguts fixant l'índex superior j . A la pràctica, doncs, hem d'integrar tres vegades el mateix sistema amb condicions inicials diferents. Una vegada determinades les $a_i^k(s)$, podrem integrar el sistema $dx^i/ds = \sum a_k^i \theta^k$, on el segon membre serà conegut. Tindrem

$$x^i(s) = \int_{s_0}^s \sum a_k^i(s) \theta^k(s) ds + C^i,$$

on les constants C^i es determinen de manera que $x^i(s_0) = x_0^i$.

Si posem $\vec{e}_i(s) = \sum a_i^k(s)\vec{e}_k$, hem de provar que $\{\vec{e}_1(s), \vec{e}_2(s), \vec{e}_3(s)\}$ és base ortonormal positiva de $\mathbf{R}^3$ per a tot s . Indiquem per g el producte escalar usual de $\mathbf{R}^3$. Designem per $g_{ij}(s)$ el producte escalar $g(e_i(s), e_j(s))$. Tindrem

$$\frac{dg_{ij}}{ds} = g\left(\frac{de_i}{ds}, e_j\right) + g\left(e_i, \frac{de_j}{ds}\right) = \sum \omega_i^k g_{kj} + \sum \omega_j^k g_{ki}.$$

Les funcions $g_{ij}(s)$ són, per tant, solucions del sistema següent:

$$\frac{dg_{ij}}{ds} = \sum \omega_i^k g_{kj} + \sum \omega_j^k g_{ki},$$

amb les condicions inicials $g_{ij}(s_0) = \delta_{ij}$. Ara bé, com que les funcions constants $g_{ij}(s) = \delta_{ij}$ constitueixen una solució trivial d'aquest sistema amb les mateixes condicions inicials, ja que la matriu (ω_i^j) és antisimètrica, pel teorema d'unicitat

de solucions tindrem $g_{ij}(s) = \delta_{ij}$. Això prova que $\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$ és base ortonormal per a qualsevol valor de s .

Provem que aquesta base és positiva. Indiquem per $\det(e_1(s), e_2(s), e_3(s))$ el determinant d'aquests vectors respecte a la base fixa e_1, e_2, e_3 . Tindrem

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \det(e_1(s), e_2(s), e_3(s)) &= \det\left(\frac{de_1}{ds}, e_2, e_3\right) + \det\left(e_1, \frac{de_2}{ds}, e_3\right) \\ &+ \det\left(e_1, e_2, \frac{de_3}{ds}\right) = \left(\sum \omega_i^i\right) \det(e_1, e_2, e_3) = 0, \end{aligned}$$

ja que la matriu (ω_i^j) és antisimètrica. Per tant, $\det(e_1(s), e_2(s), e_3(s))$ no depèn de s . Com que aquesta funció val 1 quan $s = s_0$, ha de ser constantment igual a 1. Per tant, la base és positiva per a qualsevol valor de s . ■

2 Superfícies

2.1 Exemples i definició

Una esfera de radi r centrada a l'origen de $\mathbf{R}^3$ es pot parametritzar pels angles φ i θ de la figura 3.1, de la manera següent:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = r \sin \theta \end{cases}.$$

Si volem parametritzar un tor, podem procedir de la manera següent. En el pla de les coordenades (r, z) considerem una circumferència de radi a centrada en el punt $(r_0, 0)$. Suposem $a < r_0$. Podem parametritzar-la per l'angle φ de la figura 3.2, de la manera següent:

$$\begin{cases} r - r_0 = a \cos \varphi \\ z = a \sin \varphi \end{cases}.$$

Si ara fem girar el pla (r, z) a l'espai, entorn de l'eix de les z , la circumferència anterior engendrarà un tor. La posició del pla (r, z) a l'espai vindrà determinada per l'angle θ entre l'eix de les x i l'eix de les r . La circumferència anterior, a l'espai, s'escriurà

$$\begin{cases} x = (r_0 + a \cos \varphi) \cos \theta \\ y = (r_0 + a \cos \varphi) \sin \theta \\ z = a \sin \varphi, \end{cases}$$

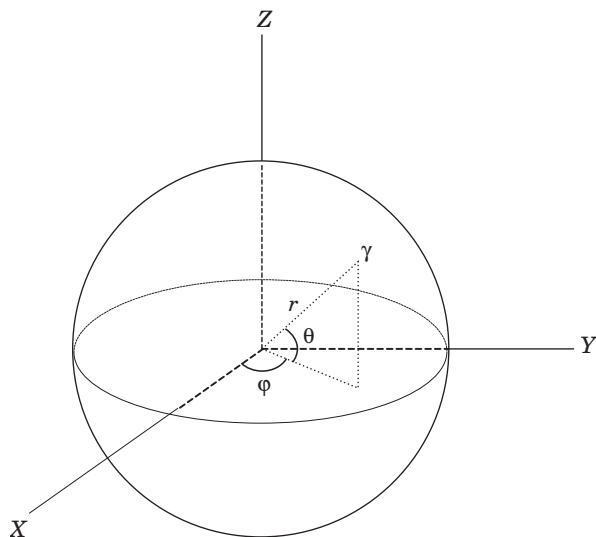


Figura 3.1

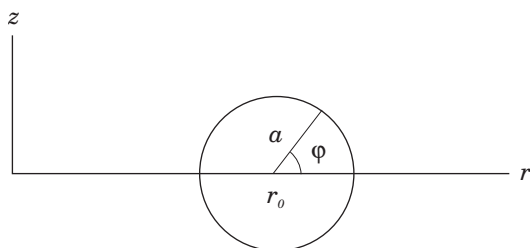


Figura 3.2

que constitueixen les expressions paramètriques (en funció de φ i θ) d'un tor. En aquests dos exemples, el que tenim en realitat és una aplicació $(\varphi, \theta) \xrightarrow{f} (x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta))$, on (φ, θ) varien en una certa regió de $\mathbf{R}^2$.

Anomenarem superfície parametritzada de $\mathbf{R}^3$ un parell (U, f) , on U és un obert de $\mathbf{R}^2$ i f una aplicació $U \rightarrow \mathbf{R}^3$, diferenciable, injectiva i tal que l'aplicació lineal tangent $f'(u)$ en cada $u \in U$ és injectiva. L'esfera i el tor anteriors no compleixen ben bé aquesta definició ja que, per exemple, a l'esfera, quan $\theta = \frac{\pi}{2}$ s'obté el pol nord, independentment del que valgui φ . Per tant, l'aplicació f pot no ser injectiva segons el domini U que es prengui per fer variar (φ, θ) . Ara bé, si es pren $U = \{(\varphi, \theta) \text{ tals que } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi\}$, llavors (U, f) compleix les propietats exigides, si bé llavors no s'obté tota l'esfera, sinó només un tros.

2.2 Espai tangent en un punt i camps vectorials

Segui (U, f) una superfície parametritzada de $\mathbf{R}^3$, $f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$. Fixem un punt $u_0 \in U$. Segui $t \rightarrow u(t)$ una petita corba diferenciable de U que passi per u_0 . Suposem $u(0) = u_0$. $f(u(t))$ serà una petita corba de la superfície, que passarà per $f(u_0)$. Veurem que el conjunt E de vectors de $\mathbf{R}^3$ tangents a corbes d'aquesta mena en el punt de paràmetre $t = 0$, constitueix un subespai vectorial de $\mathbf{R}^3$ de dimensió 2, que s'anomena espai tangent a la superfície en el punt $f(u_0)$. En efecte, el vector tangent a la corba $f(u(t))$ en el punt $t = 0$ és

$$\left(\frac{d\vec{f}(u(t))}{dt} \right)_{t=0} = \sum \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^i} \right)_{u_0} \left(\frac{du^i}{dt} \right)_{t=0}. \quad (3.3)$$

Ara bé, $(\partial \vec{f} / \partial u^1)_{u_0}$ i $(\partial \vec{f} / \partial u^2)_{u_0}$ són tangents a les corbes $t \rightarrow f(u_0^1 + t, u_0^2)$ i $t \rightarrow f(u_0^1, u_0^2 + t)$ respectivament. Per tant, són de E . L'expressió (3.3) ens diu que tot element de E és combinació lineal de $(\partial \vec{f} / \partial u^1)_{u_0}$ i $(\partial \vec{f} / \partial u^2)_{u_0}$. Recíprocament, tota combinació lineal $\sum \lambda^i (\partial \vec{f} / \partial u^i)_{u_0}$ és vector tangent a la corba $t \rightarrow f(u_0^1 + \lambda^1 t, u_0^2 + \lambda^2 t)$. Així doncs, E és el subespai de $\mathbf{R}^3$ engendrat per $(\partial \vec{f} / \partial u^1)_{u_0}$ i $(\partial \vec{f} / \partial u^2)_{u_0}$, que són linealment independents ja que $f'(u_0)$ és injectiva. D'ara endavant, posarem $S = f(U)$ i designarem per $T_{f(u)}(S)$ l'espai tangent en el punt $f(u)$.

Un camp vectorial X de $\mathbf{R}^3$ amb suport a S consisteix (per definició) a assignar a cada $f(u) \in S = f(U)$ un vector $X_{f(u)} = (X^1(u), X^2(u), X^3(u))$ de $\mathbf{R}^3$. El camp es diu diferenciable quan les funcions $X^i(u^1, u^2)$ ho són. Un camp vectorial X de $\mathbf{R}^3$ amb suport a S que compleixi la condició $X_{f(u)} \in T_{f(u)}(S)$ per a tot $u \in U$ es diu camp vectorial de S .

2.3 Primera forma quadràtica fonamental

Sigui $f: U \rightarrow S = f(U) \subset \mathbf{R}^3$ una superfície parametritzada de $\mathbf{R}^3$. Com que per a cada $x \in S$ l'espai tangent $T_x(S)$ és subespai de $\mathbf{R}^3$, el producte escalar usual de $\mathbf{R}^3$

$$\begin{aligned} g: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\longrightarrow \sum v^i w^i \end{aligned}$$

indueix, per restricció a $T_x(S)$, un producte escalar g de $T_x(S) \times T_x(S)$ en $\mathbf{R}$, que s'anomena primera forma quadràtica fonamental de la superfície. Com que $\{\partial \vec{f}/\partial u^1, \partial \vec{f}/\partial u^2\}$ és una base de $T_x(S)$, g quedarà determinat per la matriu de productes escalars dels elements d'aquesta base. Tradicionalment aquesta matriu es designa per

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

on els coeficients E, F i G , que són funcions de u^1 i u^2 , vénen donats per les expressions següents: $E = g(\partial \vec{f}/\partial u^1, \partial \vec{f}/\partial u^1)$, $F = g(\partial \vec{f}/\partial u^1, \partial \vec{f}/\partial u^2)$, $G = g(\partial \vec{f}/\partial u^2, \partial \vec{f}/\partial u^2)$. Calculem aquests coeficients per als exemples de l'apartat 2.1. En el cas de l'esfera,

$$f: (\varphi, \theta) \longrightarrow (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi} = (-r \cos \theta \sin \varphi, r \cos \theta \cos \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \theta} = (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

$$E = g(\partial \vec{f}/\partial \varphi, \partial \vec{f}/\partial \varphi) = r^2 \cos^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = r^2 \cos^2 \theta$$

$$F = g(\partial \vec{f}/\partial \varphi, \partial \vec{f}/\partial \theta) = 0$$

$$G = g(\partial \vec{f}/\partial \theta, \partial \vec{f}/\partial \theta) = r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \cos^2 \theta = r^2.$$

En el cas del tor,

$$f: (\varphi, \theta) \longrightarrow ((r_0 + a \cos \varphi) \cos \theta, (r_0 + a \cos \varphi) \sin \theta, a \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi} = (-a \sin \varphi \cos \theta, -a \sin \varphi \sin \theta, a \cos \varphi)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \theta} = (-(r_0 + a \cos \varphi) \sin \theta, (r_0 + a \cos \varphi) \cos \theta, 0)$$

$$E = g\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi}\right) = a^2; F = 0; G = g\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \theta}\right) = (r_0 + a \cos \varphi)^2.$$

Sigui $f: U \rightarrow S = f(U) \subset \mathbf{R}^3$ una superfície parametritzada de $\mathbf{R}^3$. Si $t \rightarrow u(t)$ és una corba de U , posem $x(t) = f(u(t))$. La longitud de $x(t)$ entre dos valors t_0 i t_1 del paràmetre serà $\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{x}(t)\| dt$. Es tindrà

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{d\vec{f}(u^1(t), u^2(t))}{dt} = \sum_i \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^i} \frac{du^i}{dt} \\ \|\dot{x}(t)\| &= \sqrt{g(\dot{x}(t), \dot{x}(t))} = \sqrt{\sum_{i,j} g\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j}\right) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} \\ &= \sqrt{E \left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + G \left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}. \end{aligned}$$

La longitud de l'arc de corba considerat s'expressarà, doncs, en termes dels coeficients E, F i G de la primera forma quadràtica fonamental, per

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E \left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + G \left(\frac{du^2}{dt}\right)^2} dt.$$

2.4 Segona forma quadràtica fonamental i derivació covariant

Sigui $f: U \rightarrow S = f(U) \subset \mathbf{R}^3$ una superfície parametritzada de $\mathbf{R}^3$. Siguin X, Y dos camps vectorials de S . En cada $x \in S$ la derivada direccional (a $\mathbf{R}^3$) $(\nabla_X Y)_x$ té sentit. En efecte, malgrat que X i Y estan definits només sobre S , ja hem dit al capítol anterior que $(\nabla_X Y)_x$ tenia sentit sempre que Y estigués definit sobre una petita corba que passés per x i tingués X_x com a vector tangent. Això es compleix en el cas que ens ocupa. $(\nabla_X Y)_x$ serà un vector de

$\mathbf{R}^3$ que, en general, no serà tangent a S . Indiquem per π_x la projecció ortogonal de $\mathbf{R}^3$ sobre $T_x(S)$. Designem per $(\bar{\nabla}_X Y)_x$ la projecció $\pi_x(\nabla_X Y)_x$. Indicarem per $\bar{\nabla}_X Y$ el camp vectorial de S que a cada $x \in S$ li assigna $(\bar{\nabla}_X Y)_x \in T_x(S)$. El camp $\bar{\nabla}_X Y$ s'anomena derivada covariant de Y respecte a X , a S .

El producte vectorial a $\mathbf{R}^3$ $(\partial \vec{f}/\partial u^1) \wedge (\partial \vec{f}/\partial u^2)$ serà perpendicular en tot punt $x \in S$ als dos factors i, per tant, a $T_x(S)$. El vector

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}}{\left\| \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\|}$$

serà doncs normal a la superfície S , i unitari. Observem que el signe de $\vec{n}$ depèn de l'ordre d'elecció dels dos paràmetres u^1 i u^2 . Això reflecteix el fet que en una superfície sempre hi ha dues normals unitàries, la que mira cap a un costat de la superfície i la que mira cap a l'altre costat. Suposem, doncs, elegit un d'aquests dos vectors normals unitaris (o, el que és el mateix, un ordre dels paràmetres u^1, u^2). Posem $\alpha(X, Y) = g(\nabla_X Y, n) = g(\nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y, n)$, on X i Y són camps qualssevol de S . L'aplicació α que a cada parell (X, Y) de camps de S li assigna l'escalar $\alpha(X, Y)$ s'anomena segona forma quadràtica fonamental de S . Aquesta aplicació compleix les propietats següents:

- 1) $\alpha(X_1 + X_2, Y) = \alpha(X_1, Y) + \alpha(X_2, Y)$
- 2) $\alpha(X, Y_1 + Y_2) = \alpha(X, Y_1) + \alpha(X, Y_2)$
- 3) Si $h: S \rightarrow \mathbf{R}$ és una funció tal que la composició $h \circ f: U \rightarrow \mathbf{R}$ és diferenciable, llavors $\alpha(hX, Y) = h\alpha(X, Y) = \alpha(X, hY)$.
- 4) $\alpha(X, Y) = \alpha(Y, X)$.

En efecte, les propietats 1) i 2) són trivials. Per a 3), observem que si X és un camp diferenciable de S , llavors hX també ho és, i $\alpha(hX, Y) = g(\nabla_{hX} Y, n) = hg(\nabla_X Y, n) = h\alpha(X, Y)$. Per provar la segona part de 3), avaluem la funció $\alpha(X, hY)$ en un punt $x \in S$. Tindrem $\alpha(X, hY)(x) = g_x((\nabla_X hY)_x, n_x)$. Per definició de derivada direccional, $(\nabla_X hY)_x = h(x)(\nabla_X Y)_x + X_x(h)Y_x$. Tindrem $\alpha(X, hY)(x) = g_x(h(x)(\nabla_X Y)_x + X_x(h)Y_x, n_x) = h(x)g((\nabla_X Y)_x, n_x)$, ja que Y_x i n_x són perpendiculars. Per tant $\alpha(X, hY)(x) = h(x)\alpha(X, Y)(x)$. La demostració de la propietat 4) la deixem per més endavant.

Com que $\partial \vec{f}/\partial u^1$ i $\partial \vec{f}/\partial u^2$ constitueixen en cada punt $x \in S$ una base de l'espai tangent, en virtut de les propietats de bilinealitat que acabem de demostrar, per conèixer α bastarà conèixer els coeficients següents (que seran

funcions sobre S):

$$\begin{aligned} L &= \alpha\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\right); & M &= \alpha\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\right) \\ M' &= \alpha\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\right); & N &= \alpha\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\right). \end{aligned}$$

Veurem que $M = M'$, amb la qual cosa quedarà provat que $\alpha(X, Y) = \alpha(Y, X)$ per a tot parell X, Y de camps vectorials de S . Com que $\nabla_{\partial f / \partial u^1}(\partial f / \partial u^1)$ és la derivada direccional de $\partial f / \partial u^1$ en la direcció de $\partial f / \partial u^1$, tindrem

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial u^1}} \frac{\partial f}{\partial u^1} = \frac{\partial^2 f}{\partial (u^1)^2}.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} L &= g\left(\frac{\partial^2 f}{\partial (u^1)^2}, \vec{n}\right) = \frac{1}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial f}{\partial u^2} \right\|} g\left(\frac{\partial^2 f}{\partial (u^1)^2}, \frac{\partial f}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial f}{\partial u^2}\right) = \\ &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial f}{\partial u^2} \right\|} \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial (u^1)^2}, \frac{\partial f}{\partial u^1}, \frac{\partial f}{\partial u^2}\right), \end{aligned}$$

on $\det$ indica el determinant. Ara bé, en virtut de la identitat de Lagrange a $\mathbf{R}^3$, tindrem

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial f}{\partial u^2} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial f}{\partial u^1} \right\|^2 \left\| \frac{\partial f}{\partial u^2} \right\|^2 - g\left(\frac{\partial f}{\partial u^1}, \frac{\partial f}{\partial u^2}\right)^2 = EG - F^2.$$

Per tant,

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial (u^1)^2}, \frac{\partial f}{\partial u^1}, \frac{\partial f}{\partial u^2}\right).$$

Anàlogament,

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^1 \partial u^2}, \frac{\partial f}{\partial u^1}, \frac{\partial f}{\partial u^2}\right), \\ M' &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^1}, \frac{\partial f}{\partial u^1}, \frac{\partial f}{\partial u^2}\right), \end{aligned}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(u^2)^2}, \frac{\partial f}{\partial u^1}, \frac{\partial f}{\partial u^2}\right).$$

Veiem, doncs, que $M = M'$.

2.5 Propietats formals de la derivada covariant $\bar{\nabla}_X Y$

Sigui $f: U \rightarrow S = f(U) \subset \mathbf{R}^3$ una superfície parametritzada de $\mathbf{R}^3$. Elegim, com sempre, un camp normal unitari $\vec{n}$ (dels dos possibles). Si X, Y són camps vectorials de S , descomponent en cada punt el vector $\nabla_X Y$ (vector de $\mathbf{R}^3$) en les seves components tangencial i normal, tindrem

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \alpha(X, Y)n,$$

on α és la segona forma quadràtica fonamental.

Al capítol 2 hem introduït el claudàtor $[X, Y]$ per a camps de $\mathbf{R}^n$ com la diferència $\nabla_X Y - \nabla_Y X$. Si suposem, aquí, que X, Y són camps de S , el claudàtor $[X, Y]$ estarà encara definit (malgrat que X, Y no són camps de $\mathbf{R}^3$) ja que tant $\nabla_X Y$ com $\nabla_Y X$ estan definits en virtut de l'observació del començament de l'apartat anterior. Veurem ara que $[X, Y]$ és tangent a S . En efecte, de la definició de $[X, Y]$, tenim

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Multiplicant escalarment aquesta identitat per $\vec{n}$, tindrem

$$g([X, Y], n) = \alpha(X, Y) - \alpha(Y, X).$$

Com que α és simètrica, $g([X, Y], n) = 0$. Això ens diu que $[X, Y]$ és tangent.

Proposició 3.5 *La derivada covariant $\bar{\nabla}_X Y$ té les propietats següents:*

- 1) $\bar{\nabla}_{X_1 + X_2} Y = \bar{\nabla}_{X_1} Y + \bar{\nabla}_{X_2} Y.$
- 2) $\bar{\nabla}_X (Y_1 + Y_2) = \bar{\nabla}_X Y_1 + \bar{\nabla}_X Y_2.$
- 3) $\bar{\nabla}_{hX} Y = h\bar{\nabla}_X Y.$
- 4) $\bar{\nabla}_X (hY) = X(h)Y + h\bar{\nabla}_X Y.$
- 5) $X(g(Y, Z)) = g(\bar{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \bar{\nabla}_X Z).$
- 6) $\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = [X, Y],$

on $X, Y, Z, X_1, X_2, Y_1, Y_2$ són camps vectorials de la superfície S , i $h: S \rightarrow \mathbf{R}$ és una funció tal que la composició $h \circ f: U \rightarrow \mathbf{R}$ és diferenciable.

Aclariment. A la propietat 4), $X(h)$ significa la funció sobre S que a cada $x \in S$ li assigna la derivada de h en la direcció de X_x . Dit d'una altra manera, si $u_0 = f^{-1}(x)$ i si $u(t)$ és una petita corba de U tal que $u(0) = u_0$ i tal que X_x és el vector tangent de la corba $f(u(t))$ en el valor $t = 0$, llavors

$$X(h)(x) = \left[\frac{d}{dt} h(f(u(t))) \right]_{t=0}.$$

Observem que aquest significat de derivada direccional és el mateix que hem donat, amb altres paraules, a l'actuació de camps sobre funcions a $\mathbf{R}^n$ (apartat 1 del capítol 2). A la propietat 5), $X(g(Y, Z))$ té el mateix significat, és a dir, el camp X actuant sobre la funció $g(Y, Z)$.

DEMOSTRACIÓ. Les propietats 1), 2), 3), 4) i 5) es desprenen de les propietats anàlogues de la derivada direccional $\nabla_X Y$ de $\mathbf{R}^3$ estudiades a l'apartat 3 del capítol 2. Per exemple, per demostrar 4) farem el raonament següent. Tenim $(\bar{\nabla}_X(hY))_x = \pi_x(\nabla_X(hY))_x$, on π_x significa la projecció ortogonal de $\mathbf{R}^3$ sobre $T_x(S)$. Ara bé, com que $(\nabla_X(hY))_x$ és la derivada direccional de hY en la direcció de X_x , tindrem $(\nabla_X(hY))_x = X(h)(x)Y_x + h(x)(\nabla_X Y)_x$. Per tant, $(\bar{\nabla}_X(hY))_x = X(h)(x)Y_x + h(x)(\bar{\nabla}_X Y)_x$.

La propietat 6) es dedueix per projecció ortogonal sobre $T_x(S)$ de la identitat $[X, Y]_x = (\nabla_X Y)_x - (\nabla_Y X)_x$, tenint en compte que $[X, Y]_x$ és tangent. ■

2.6 Curvatures normals i segona forma quadràtica fonamental

Sigui $f: U \rightarrow S = f(U) \subset \mathbf{R}^3$ una superfície parametritzada de $\mathbf{R}^3$. Sigui $u(t)$ una corba de U i posem $x(t) = f(u(t))$. Reparametritzem aquesta corba de $\mathbf{R}^3$ per l'arc s . Sigui $\vec{n}$ un dels dos camps unitaris normals a S , escollit una vegada per totes. El producte escalar $g(d^2\vec{x}(s)/ds^2, \vec{n}_{x(s)})$ s'anomena curvatura normal de la corba $x(s)$ en el punt de paràmetre s . Recordem que de les fórmules de Frenet teníem

$$\frac{d^2\vec{x}(s)}{ds^2} = \rho(s)\vec{N}(s),$$

on $\rho(s)$ era la curvatura. La projecció d'aquest vector sobre la normal $\vec{n}$ a la superfície és la curvatura normal. Un fet sorprenent, encara que de demostració immediata, és que la curvatura normal en cada punt només depèn del vector tangent a la corba en aquest punt. Dit d'una altra manera: dues corbes de S , $x(s)$ i $y(s)$, que passin pel mateix punt x_0 de S i que en aquest punt tinguin el mateix vector tangent, tenen la mateixa curvatura normal en

aquest punt. Aquest resultat és degut a Meusnier (segle XVIII). Abans de donar-ne una demostració, observem que aquest resultat no seria cert si en el seu enunciat substituïssim les paraules “curvatura normal” per “curvatura”. En efecte, per calcular la curvatura hem utilitzat expressions en què apareix la derivada $d^2\vec{x}(s)/ds^2 = dT/ds$. Per calcular aquesta derivada en un punt s_0 no en tenim prou amb conèixer T en $x(s_0)$, sinó que hauríem de conèixer T en tots els punts $x(s)$ per a tots els s en un entorn de s_0 . Una vegada dit això, demostrem el teorema de Meusnier. La derivada direccional $\nabla_{\dot{x}}\dot{x}$ a $\mathbf{R}^3$ (derivada de $\dot{x}$ en la direcció de $\dot{x}$) no és altra cosa que la derivada segona $d^2\vec{x}(s)/ds^2$. Per tant, la curvatura normal és $g(\nabla_{\dot{x}}\dot{x}, n) = \alpha(\dot{x}, \dot{x})$. Ara bé, $\alpha(\dot{x}, \dot{x})$ en un punt $s = s_0$ només depèn del vector tangent $\dot{x}$ en aquest punt. En efecte, $\dot{x}(s_0)$ serà una certa combinació lineal $\lambda(\partial\vec{f}/\partial u^1) + \mu(\partial\vec{f}/\partial u^2)$, i $\alpha(\dot{x}, \dot{x}) = L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2$. Això prova el teorema de Meusnier i dóna, a més, la interpretació de la segona forma quadràtica fonamental que descrivim a continuació. En cada punt $x_0 \in S$ la segona forma quadràtica fonamental és una aplicació bilineal simètrica $\alpha: T_{x_0}(S) \times T_{x_0}(S) \rightarrow \mathbf{R}$ que té la propietat que per a qualsevol vector unitari v de $T_{x_0}(S)$, $\alpha(v, v)$ és la curvatura normal de qualsevol corba que tingui v com a vector tangent en aquest punt.

2.7 Curvatures principals

Sigui $f: U \rightarrow S = f(U) \subset \mathbf{R}^3$ una superfície parametritzada de $\mathbf{R}^3$. En cada punt $x_0 \in S$ tenim la segona forma quadràtica

$$\alpha: T_{x_0}(S) \times T_{x_0}(S) \longrightarrow \mathbf{R},$$

i el producte escalar

$$g: T_{x_0}(S) \times T_{x_0}(S) \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Anomenem E l'espai vectorial $T_{x_0}(S)$. A la forma quadràtica α se li associa l'endomorfisme $P: E \rightarrow E$ definit així: $P(X)$ és l'únic vector de E que compleix $g(P(X), Y) = \alpha(X, Y)$ per a tot $Y \in E$. L'endomorfisme P és autoadjunt, és a dir, compleix $g(P(X), Y) = g(X, P(Y))$ per a tot $X, Y \in E$. En efecte, $g(P(X), Y) = \alpha(X, Y) = \alpha(Y, X) = g(P(Y), X) = g(X, P(Y))$. Un teorema ben conegut d'àlgebra ens garanteix que existeix una base ortonormal de E respecte al producte escalar g , formada per vectors propis de P . Una demostració molt elemental d'aquest fet, que usa molt pocs conceptes algebraics, es pot trobar, per exemple, al llibre de W. Greub, *Linear Algebra*, Springer-Verlag (1981), pp. 221-222. Quan la dimensió de E és 2 (com en el cas que ens ocupa), si e_1 i e_2 són aquests vectors propis de P , i ρ_1 i ρ_2 els valors propis

corresponents, es pot afirmar que ρ_1 i ρ_2 són el màxim i el mínim de la funció

$$\begin{array}{ccc} Q = \text{cerclle unitat de } E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ v & \longrightarrow & g(P(v), v) . \end{array}$$

En efecte, si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $P = \rho I$ on I és la identitat, i la funció anterior és constant. Suposem $\rho_1 \neq \rho_2$. Si $v = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2$, llavors $g(P(v), v) = \rho_1 \cos^2 \varphi + \rho_2 \sin^2 \varphi$ és funció de l'angle φ , la derivada de la qual és $2(\rho_2 - \rho_1) \cos \varphi \sin \varphi$, que s'anul·la quan $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Si suposem, per exemple, $\rho_1 < \rho_2$, llavors ρ_2 correspon al màxim i ρ_1 al mínim.

Observem que α diagonalitza en la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, amb

$$\alpha(e_1, e_1) = g(P(e_1), e_1) = \rho_1$$

$$\alpha(e_2, e_2) = g(P(e_2), e_2) = \rho_2$$

$$\alpha(e_1, e_2) = g(P(e_1), e_2) = 0$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} .$$

$\rho_1 = \alpha(e_1, e_1)$ és la curvatura normal en la direcció de e_1 . La direcció e_1 és la direcció en què la curvatura normal ρ_1 és màxima. Anàlogament, e_2 és la direcció en la qual la curvatura normal ρ_2 és mínima. Els valors propis ρ_1 i ρ_2 s'anomenen curvatures principals, i e_1 i e_2 s'anomenen direccions principals. Les direccions v en les quals la curvatura normal $\alpha(v, v)$ s'anul·la s'anomenen direccions asimptòtiques. Pot ser que no existeixin direccions asimptòtiques. El producte $\rho_1 \cdot \rho_2$ de les dues curvatures principals s'anomena curvatura de Gauss i la seva mitjana, $(\rho_1 + \rho_2)/2$, curvatura mitjana.

Per trobar els valors propis de l'endomorfisme P s'ha de resoldre $\det(P - \lambda I) = 0$ (equació de segon grau en λ). Multiplicant aquesta equació per $\det g$ (que és $\neq 0$) s'obté $\det(gP - \lambda g) = 0$. Ara bé, matricialment, $P = g^{-1}\alpha$. Per tant, $gP = \alpha$. Per tant, per trobar els valors propis de P s'ha de resoldre l'equació $\det(\alpha - \lambda g) = 0$, és a dir,

$$\begin{vmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{vmatrix} = 0 .$$

Les dues solucions d'aquesta equació de segon grau en λ ens donaran ρ_1 i ρ_2 . La curvatura de Gauss $K = \rho_1 \cdot \rho_2$ és el determinant de l'endomorfisme P , ja que el determinant d'un endomorfisme és un concepte intrínsec que no depèn de

les bases concretes en què s'expressi l'endomorfisme. Com que, matricialment, $P = g^{-1}\alpha$,

$$K = \det P = \frac{\det \alpha}{\det g} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Donem ara unes quantes definicions relatives als conceptes que acabem d'introduir. Un punt d'una superfície S en el qual la curvatura de Gauss és positiva es diu punt el·líptic. Un punt de S es diu hiperbòlic si la curvatura de Gauss en aquest punt és negativa. Un punt es diu parabòlic si la curvatura de Gauss s'hi anul·la i si, a més, en aquest punt α no és idènticament nul·la. Un punt en el qual α s'anul·la es diu pla. Això implica $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Un punt de S es diu umbilic si $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$. Una corba $x(t) = f(u(t))$ sobre S es diu línia de curvatura si és tangent en tot punt a una direcció principal. Una corba $x(t) = f(u(t))$ es diu asimptòtica si és tangent en tot punt a una direcció asimptòtica.

Donem tot seguit les equacions diferencials que caracteritzen les línies de curvatura i les asimptòtiques. Fixem $x_0 \in S$. Tot $v \in T_{x_0}(S)$ s'escriurà

$$v = \xi \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} + \eta \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}.$$

Perquè v sigui vector propi de P , haurà de complir $P(v) = \lambda v$, això és

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

(ja que $P = g^{-1}\alpha$). El vector $(L\xi + M\eta, M\xi + N\eta)$ ha de ser, doncs, proporcional a $(E\xi + F\eta, F\xi + G\eta)$. Aquesta condició es pot expressar per l'anul·lació del determinant

$$\begin{vmatrix} L\xi + M\eta & E\xi + F\eta \\ M\xi + N\eta & F\xi + G\eta \end{vmatrix} = 0.$$

O també, de manera més simètrica,

$$\begin{vmatrix} \eta^2 & -\xi\eta & \xi^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Sigui $x(t) = f(u(t))$ una corba de la superfície S . Tindrem

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt}.$$

Si aquest vector ha de ser una direcció principal per a tot t , haurà de complir l'equació

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{du^2}{dt}\right)^2 & -\frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} & \left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Si ens interessa només la corba, sense la parametrització, podem buscar u^1 en funció de u^2 (o bé u^2 en funció de u^1) i prescindir del paràmetre t , la qual cosa ens porta a l'equació

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1 du^2 & (du^1)^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Tindrem, així, un polinomi de grau 2 en du^1/du^2 igualat a zero. Descomponent aquest polinomi en producte de dos de primer grau, obtindrem una equació diferencial del tipus

$$\left(\frac{du^1}{du^2} - f_1(u^1, u^2)\right) \left(\frac{du^1}{du^2} - f_2(u^1, u^2)\right) = 0,$$

que dóna lloc a les dues equacions ordinàries

$$\begin{aligned} \frac{du^1}{du^2} &= f_1(u^1, u^2) \\ \frac{du^1}{du^2} &= f_2(u^1, u^2), \end{aligned}$$

que corresponen a les dues famílies de línies de curvatura.

Una direcció asimptòtica vindrà donada per un vector $\vec{v} = (\xi, \eta)$ que compleixi

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = 0.$$

Per tant, l'equació diferencial de les línies asimptòtiques serà

$$L(du^1)^2 + 2Mdu^1 du^2 + N(du^2)^2 = 0.$$

2.8 Aplicacions de Gauss i de Weingarten

Interpretem geomètricament l'endomorfisme $P: T_x(S) \rightarrow T_x(S)$ associat a la segona forma quadràtica fonamental $\alpha: T_x(S) \times T_x(S) \rightarrow \mathbf{R}$. Designem per S^2 l'esfera unitat de $\mathbf{R}^3$, $S^2 = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \text{ amb } \|\vec{x}\| = 1\}$. Sigui $\vec{n}$, com sempre, un

dels dos camps unitaris normals a S , escollit una vegada per totes. L'aplicació $\varphi: S \rightarrow S^2$ que a cada $x \in S$ li assigna el vector unitari $\vec{n}_x$ es coneix amb el nom d'aplicació de Gauss de la superfície S . Per a cada $x \in S$, considerem l'aplicació $\varphi_*: T_x(S) \rightarrow T_{\varphi(x)}(S^2)$ que a cada vector $v \in T_x(S)$ tangent a una corba $x(t)$ de S que passi per x li assigna el vector de $T_{\varphi(x)}(S^2)$ tangent a la corba $\varphi(x(t))$. Observem que $T_x(S)$ i $T_{\varphi(x)}(S^2)$, considerats com a subespais vectorials de $\mathbf{R}^3$, coincideixen. En efecte, com que $\varphi(x) = \vec{n}_x$, tant $T_{\varphi(x)}(S^2)$ com $T_x(S)$ no són altra cosa que el subespai de $\mathbf{R}^3$ de vectors ortogonals a $\vec{n}_x$. Amb aquesta observació, l'aplicació φ_* pot ser considerada com un endomorfisme de $T_x(S)$. L'aplicació $W: T_x(S) \rightarrow T_x(S)$, que associa a cada $v \in T_x(S)$ la derivada direccional $\nabla_v \vec{n}$, s'anomena aplicació de Weingarten. Observem que $\nabla_v \vec{n}$, que en principi és de $\mathbf{R}^3$, pertany a $T_x(S)$. Això es veu derivant la identitat $g(n, n) = 1$ direccionalment en la direcció de v : $2g(\nabla_v n, n) = 0$. Això ens diu que $\nabla_v n$ és perpendicular a n i, per tant, tangent.

Proposició 3.6 *L'endomorfisme $P: T_x(S) \rightarrow T_x(S)$ associat a la segona forma quadràtica α coincideix amb $-W$. A més, W coincideix amb $\varphi_*: T_x(S) \rightarrow T_x(S)$, aplicació lineal tangent de l'aplicació de Gauss.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $v \in T_x(S)$, i $x(t)$ una corba de S tangent a v quan $t = 0$. $P(v)$ és l'únic vector de $T_x(S)$ que compleix $g(P(v), w) = \alpha(v, w)$ per a tot $w \in T_x(S)$. Sigui X un camp vectorial de S . Tenint en compte la definició de α , es complirà $g(P(v), X_x) = \alpha(v, X_x) = g((\nabla_v X)_x, n_x)$. Sobre la corba $x(t)$ tindrem $g(X_{x(t)}, n_{x(t)}) = 0$. Derivant aquesta identitat respecte a t , tindrem

$$g(\nabla_{\dot{x}} X, n) + g(X, \nabla_{\dot{x}} n) = 0,$$

d'on $g(P(\dot{x}), X) = \alpha(\dot{x}, X) = g(\nabla_{\dot{x}} X, n) = -g(X, \nabla_{\dot{x}} n)$. Per tant, $P(\dot{x}) = -\nabla_{\dot{x}} n$. D'altra banda, si φ és l'aplicació de Gauss, $\varphi(x(t)) = n_{x(t)}$. Llavors $(d\varphi(x(t))/dt)_{t=0}$ no és altra cosa que la derivada direccional de $\vec{n}_{x(t)}$ en la direcció de $\dot{x}(0)$, és a dir, $\nabla_{\dot{x}(0)} \vec{n}$. ■

Aquesta interpretació geomètrica de l'endomorfisme P pot servir, en alguns exemples concrets, per determinar sense càlculs les direccions principals i curvatures principals.

Exemple. Si la superfície S és l'esfera unitat S^2 , llavors l'aplicació de Gauss és la identitat. L'aplicació lineal tangent de la identitat és la identitat. Per tant, totes les direccions són direccions pròpies de l'endomorfisme P amb valor propi -1 . La curvatura de Gauss de l'esfera unitat és 1.

Exemple. Si la superfície S és el cilindre $x^2 + y^2 = 1$, l'aplicació de Gauss aplica S en l'equador de S^2 . Les corbes de S "horitzontals" (això és, perpendiculars

a les generatrius del con) s'apliquen en l'equador, mentre que les generatrius del con s'apliquen en punts (cada generatriu en un punt). Per tant, l'aplicació de Weingarten és la identitat sobre els vectors “horitzontals” i s'anul·la sobre els “verticals”. Les curvatures principals són, doncs, -1 i 0 . La curvatura de Gauss és nul·la.

Exemple. Proveu, per aquest mètode, que en qualsevol superfície de revolució els meridians i els paral·lels són línies de curvatura.

2.9 Una altra interpretació de la segona forma quadràtica fonamental

Sigui $f: U \rightarrow S = f(U) \subset \mathbf{R}^3$ una superfície parametritzada de $\mathbf{R}^3$ i sigui $p \in S$. Prenguem uns eixos rectangulars de coordenades a $\mathbf{R}^3$, (x^1, x^2, x^3) , amb origen en el punt p i de manera que els eixos x^1, x^2 estiguin continguts en el pla $p + T_p(S)$, i de manera que el tercer eix sigui el vector unitari normal a la superfície, n_p , que hem escollit una vegada per totes. Suposem que en un entorn del punt p la superfície S s'expressa paramètricament per

$$\begin{cases} x^1 = x^1 \\ x^2 = x^2 \\ x^3 = x^3(x^1, x^2). \end{cases}$$

Tal com hem pres els eixos, el punt p tindrà coordenades $(0, 0, 0)$, la qual cosa implica $x^3(0, 0) = 0$. A més, el pla tangent $T_p(S)$ serà

$$x^3 = \sum_{i=1}^2 (\partial x^3 / \partial x^i)_{(0,0)} x^i.$$

Com que aquest pla ha de ser $x^3 = 0$ (tal com hem pres els eixos), tindrem $(\partial x^3 / \partial x^i)_{(0,0)} = 0$. Si desenvolupem $x^3(x^1, x^2)$ per Taylor a l'origen, tindrem

$$x^3 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\partial^2 x^3 / \partial x^i \partial x^j)_{(0,0)} x^i x^j + T,$$

on T és el terme complementari.

Teorema 3.7 La segona forma quadràtica α de S en el punt p s'expressa, en els eixos escollits, per

$$\alpha(X, Y) = \sum_{i,j} (\partial^2 x^3 / \partial x^i \partial x^j)_{(0,0)} X^i Y^j.$$

Dit d'una altra manera, α és el doble de la forma bilineal associada a la millor aproximació quadràtica de la superfície en el punt p , per la fórmula de Taylor.

DEMOSTRACIÓ. Sigui $x(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(x^1(t), x^2(t)))$ una corba qualsevol de S que passi per p . Suposem, doncs, $x^1(0) = 0$ i $x^2(0) = 0$. El vector $\ddot{x}(t)$ serà $(d^2x^1(t)/dt^2, d^2x^2(t)/dt^2, d^2x^3(x^1(t), x^2(t))/dt^2)$. Tindrem

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^3(x^1(t), x^2(t))}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i \frac{\partial x^3}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \right\} = \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 x^3}{\partial x^j \partial x^i} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^i}{dt} + \sum_{i,j} \frac{\partial x^3}{\partial x^i} \frac{d^2x^j(t)}{dt^2}. \end{aligned}$$

D'aquí deduïm que

$$\left(\frac{d^2x^3(x^1(t), x^2(t))}{dt^2} \right)_{(0,0)} = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 x^3}{\partial x^i \partial x^j} \right)_0 \dot{x}^i(0) \dot{x}^j(0),$$

ja que $(\partial x^3 / \partial x^i)_0 = 0$. Per tant, el vector $\ddot{x}(0) = (\nabla_{\dot{x}} \dot{x})_p$ és

$$\left(\ddot{x}^1(0), \ddot{x}^2(0), \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 x^3}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{(0,0)} \dot{x}^i(0) \dot{x}^j(0) \right).$$

Com que el vector unitari normal a la superfície en el punt p és $(0, 0, 1)$, tindrem

$$\alpha(\dot{x}(0), \dot{x}(0)) = g((\nabla_{\dot{x}} \dot{x})_p, n_p) = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 x^3}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{(0,0)} \dot{x}^i(0) \dot{x}^j(0),$$

tal com volíem demostrar. ■

Exemple. Calculem les curvatures principals a l'origen de la sella de muntar $z = y^2 - x^2$. Com que aquí la millor aproximació quadràtica d'aquesta superfície a l'origen és ella mateixa, la segona forma quadràtica fonamental serà $\alpha(X, Y) = 2(X^2Y^2 - X^1Y^1)$. Les direccions principals a l'origen seran l'eix de les x i l'eix de les y . Les curvatures principals seran respectivament -2 i 2 . La curvatura de Gauss a l'origen serà 4 .

2.10 Formes diferencials ordinàries i formes diferencials vectorials sobre una superfície

Per tal de demostrar el Teorema Egredi de Gauss a l'apartat següent, ara necessitem parlar una mica de formes diferencials sobre una superfície. Sigui

$f: U \rightarrow S = f(U) \subset \mathbf{R}^3$ una superfície parametritzada de $\mathbf{R}^3$. Sigui $h: S \rightarrow \mathbf{R}$ una funció sobre S tal que la composició $h \circ f$ sigui diferenciable. Si $x = f(u)$ és un punt qualsevol de S , la diferencial de h en el punt x , $(dh)_x$, és, per definició, l'aplicació lineal de $T_x(S)$ a $\mathbf{R}$ que a cada $\vec{V} = V^1(\partial\vec{f}/\partial u^1) + V^2(\partial\vec{f}/\partial u^2)$ de $T_x(S)$ li assigna el nombre $(\partial h(f(u^1, u^2))/\partial u^1)V^1 + (\partial h(f(u^1, u^2))/\partial u^2)V^2$. Això és, la derivada direccional de h en la direcció de V . Així doncs, $(dh)_x$ és un element de $T_x(S)^*$. Si anomenem (fent un abús de llenguatge) u^1 i u^2 les funcions de S a $\mathbf{R}$ que a cada punt $x = f(u^1, u^2)$ de S li associen u^1 i u^2 respectivament, llavors du^1 aplicarà $\partial\vec{f}/\partial u^1$ en 1 i $\partial\vec{f}/\partial u^2$ en 0, mentre que du^2 aplicarà $\partial\vec{f}/\partial u^1$ en 0 i $\partial\vec{f}/\partial u^2$ en 1. Per tant, $\{du^1, du^2\}$ serà en cada punt $x = f(u) \in S$ la base dual de $\{\partial\vec{f}/\partial u^1, \partial\vec{f}/\partial u^2\}$.

Sigui $p = 0, 1, 2$. Una p -forma diferencial ω sobre S consisteix, per definició, a assignar a cada $x = f(u) \in S$ un element $\omega_{f(u)} \in \wedge^p (T_{f(u)}(S)^*)$. Fem la convenció que, quan $p = 0$, $\wedge^0 (T_{f(u)}(S)^*)$ indica $\mathbf{R}$. Per tant, una 0-forma sobre S serà una funció sobre S . Com que $\{du^1, du^2\}$ és en cada punt $x = f(u)$ una base de $T_x(S)^*$, una p -forma diferencial ω sobre S s'expressarà sempre de la manera següent, segons que $p = 0, 1, 2$:

$$\omega(f(u)) = \omega(u^1, u^2) \quad (\text{si } p = 0) \quad (3.4)$$

$$\omega_{f(u)} = \omega_1(u^1, u^2)du^1 + \omega_2(u^1, u^2)du^2 \quad (\text{si } p = 1) \quad (3.5)$$

$$\omega_{f(u)} = \omega(u^1, u^2)du^1 \wedge du^2 \quad (\text{si } p = 2) . \quad (3.6)$$

Aquestes p -formes es diuen diferenciables si les funcions $\omega(u^1, u^2)$ i $\omega_i(u^1, u^2)$ de les expressions anteriors ho són. Les expressions (3.4), (3.5) i (3.6) mostren que una p -forma sobre S s'expressa com una p -forma de $\mathbf{R}^2$ en les dues variables u^1, u^2 . (Les p -formes a $\mathbf{R}^n$ les hem introduït al capítol precedent.) Per tant, podem diferenciar exteriorment una p -forma sobre S com si es tractés d'una p -forma sobre $\mathbf{R}^2$, tal com fèiem al capítol anterior.

Parlem ara de p -formes vectorials. Una p -forma vectorial sobre S consisteix, per definició, a assignar a cada $x = f(u) \in S$ un element $\omega_{f(u)} \in (\wedge^p T_{f(u)}(S)^*) \otimes \mathbf{R}^3$. Així doncs, quan $p = 0$, una 0-forma vectorial serà un camp vectorial de $\mathbf{R}^3$ amb suport a S . Una 1-forma vectorial assignarà a cada $x = f(u) \in S$ un element de $T_{f(u)}(S)^* \otimes \mathbf{R}^3$. Fent servir la identificació algebraica $T_{f(u)}(S)^* \otimes \mathbf{R}^3 \cong \mathcal{L}(T_{f(u)}(S), \mathbf{R}^3)$ establerta al capítol 1, si ω és 1-forma vectorial i $v \in T_{f(u)}(S)$, $\omega_{f(u)}$ actuarà sobre v donant un vector $\omega_{f(u)}(v)$ de $\mathbf{R}^3$. Si ω és de la forma $\alpha \otimes X$, essent α una 1-forma ordinària i X un camp vectorial de $\mathbf{R}^3$ amb suport a S , llavors $(\alpha \otimes X)_{f(u)}(v) = \alpha_{f(u)}(v)X_{f(u)}$.

Definim ara la diferencial exterior d'una p -forma vectorial. Comencem definint la diferencial exterior d'una 0-forma vectorial. Sigui X un camp vectorial

de $\mathbf{R}^3$ amb suport a S . Definim dX com la 1-forma vectorial que a cada $x = f(u) \in S$ li assigna l'element de $T_{f(u)}(S)^* \otimes \mathbf{R}^3$ donat per

$$d\vec{X} = du^1 \otimes \frac{\partial \vec{X}_{f(u)}}{\partial u^1} + du^2 \otimes \frac{\partial \vec{X}_{f(u)}}{\partial u^2}.$$

Si ara ω és una p -forma vectorial, amb $p \neq 0$, de la forma $\alpha \otimes X$, on α és una p -forma ordinària i X un camp vectorial de $\mathbf{R}^3$ amb suport S , definim $d(\alpha \otimes X) = d\alpha \otimes X + (-1)^p \alpha \wedge dX$, on aquí $\alpha \wedge dX$ indica, per abús de llenguatge,

$$(\alpha \wedge du^1) \otimes \frac{\partial \vec{X}}{\partial u^1} + (\alpha \wedge du^2) \otimes \frac{\partial \vec{X}}{\partial u^2}.$$

Estenem d a totes les p -formes vectorials imposant la condició $d(\omega + \omega') = d\omega + d\omega'$. Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ és una base fixa de $\mathbf{R}^3$, llavors tota p -forma vectorial ω s'expressa per $\omega = \sum \omega^i \otimes e_i$, amb les ω^i p -formes ordinàries. Tindrem llavors $d\omega = \sum d\omega^i \otimes e_i$, ja que $de_i = 0$.

Si X és una 0-forma vectorial sobre S i $v \in T_{f(u)}(S)$, ¿què serà $(dX)(v)$? De l'expressió anterior de dX es desprèn que $dX(v)$ és la derivada direccional de X en la direcció de v , és a dir, $(dX)(v) = \nabla_v X$.

2.11 Teorema Egredi de Gauss

Siguin $f: U \rightarrow S = f(U) \subset \mathbf{R}^3$ i $r: U \rightarrow S' = r(U) \subset \mathbf{R}^3$ dues superfícies parametritzades de $\mathbf{R}^3$ amb el mateix domini U de paràmetres. Designem per h l'aplicació $S \rightarrow S'$ que aplica $f(u)$ en $r(u)$. En cada punt $x \in S$, $(h_*)_x$ designarà l'aplicació lineal tangent de h en x , $(h_*)_x: T_x(S) \rightarrow T_{h(x)}(S')$. (Recordem que aquest concepte d'aplicació lineal tangent entre dues superfícies l'havíem definit a l'apartat 2.8 per l'aplicació de Gauss.) Direm que h és una isometria entre S i S' quan $(h_*)_x$ és una isometria d'espais vectorials per a tot $x \in S$. Això equival a dir que $g_x(v, w) = g_{h(x)}((h_*)_x v, (h_*)_x w)$ per a tot $v, w \in T_x(S)$ i tot $x \in S$.

Com que h aplica $f(u)$ en $r(u)$, $(h_*)_{f(u)}$ aplicarà $\partial \vec{f}/\partial u^i$ en $\partial \vec{r}/\partial u^i$, $i = 1, 2$. Si anomenem E, F i G els coeficients de la primera forma quadràtica fonamental de S relatius a la base $\{\partial \vec{f}/\partial u^1, \partial \vec{f}/\partial u^2\}$ de vectors tangents de S , i si E', F', G' són els coeficients de la primera forma quadràtica de S' relatius a la base $\{\partial \vec{r}/\partial u^1, \partial \vec{r}/\partial u^2\}$ de vectors tangents de S' , la condició d'isometria entre S i S' equival a la igualtat dels tres coeficients $E = E'$, $F = F'$, $G = G'$. En efecte,

$$E(u^1, u^2) = g_{f(u)}(\partial \vec{f}/\partial u^1, \partial \vec{f}/\partial u^2) = g_{r(u)}(\partial \vec{r}/\partial u^1, \partial \vec{r}/\partial u^2) = E'(u^1, u^2).$$

Un càlcul anàleg serveix per veure que $F = F'$ i $G = G'$.

Siguin $f: U \rightarrow S = f(U) \subset \mathbf{R}^3$ i $f': U' \rightarrow S' = f'(U') \subset \mathbf{R}^3$ dues superfícies parametritzades de $\mathbf{R}^3$ (amb dominis U i U' possiblement diferents). Direm que S i S' són isomètriques si existeix un difeomorfisme $\varphi: U \rightarrow U'$ tal que l'aplicació h de S a S' que a cada $f(u) \in S$ li assigna $r(u) = f'(\varphi(u)) \in S'$ és una isometria en el sentit anterior. φ s'interpreta com un canvi de parametrització a S' . Per exemple, el cilindre S de $\mathbf{R}^3$ donat paramètricament per $f(\lambda, \mu) = (\cos \lambda, \sin \lambda, \mu)$, $0 < \lambda < 2\pi$, i el (tros de) pla S' donat per $r(\lambda, \mu) = \vec{a} + \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$, amb $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vectors perpendiculars i unitaris de $\mathbf{R}^3$, $0 < \lambda < 2\pi$, són dues superfícies isomètriques, (prenent aquí com a φ la identitat) ja que és fàcil comprovar que $E = E' = 1$, $F = F' = 0$ i $G = G' = 1$. Expliquem intuïtivament com funciona la isometria en aquest exemple. Considerem la regió U de $\mathbf{R}^2$ donada per $U = \{(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \text{ amb } 0 < \lambda < 2\pi\}$. Pensem aquesta regió com un full de paper il·limitat en el sentit vertical, ficat a $\mathbf{R}^3$ per la injecció $(\lambda, \mu) \rightarrow (0, \lambda, \mu)$. Enrotllem aquest full de paper vertical de manera que l'eix de les λ d'abans passi a ser ara la circumferència horitzontal de centre l'origen i radi 1. La composició de la injecció $(\lambda, \mu) \rightarrow (0, \lambda, \mu)$ amb l'enrotllament, serà la parametrització $\vec{f}$ utilitzada del cilindre S . La parametrització $\vec{r}$ del pla S' consisteix a portar el pla vertical $(0, \lambda, \mu)$ sobre S' de manera que l'eix de les λ vagi sobre la recta $\vec{a} + \vec{b}\lambda$ i el de les μ vagi sobre la recta $\vec{a} + \vec{c}\mu$ (amb $\vec{b}$ i $\vec{c}$ perpendiculars i unitaris) conservant les distàncies. La isometria $h: S \rightarrow S'$ consisteix aquí a desenrotllar el cilindre i portar-lo sobre el pla S' de la manera que hem descrit. En general, tota superfície que es pugui desplegar sobre un paper pla conservant les distàncies és isomètrica a un tros de pla.

El teorema següent, degut a Gauss (1827), es coneix arreu pel nom de Teorema Egredi (per la seva extraordinària bellesa).

Teorema 3.8 (Teorema Egredi de Gauss) *Dues superfícies isomètriques tenen la mateixa curvatura de Gauss en els punts corresponents per la isometria. Dit d'una altra manera, si les superfícies $f: U \rightarrow S = f(U) \subset \mathbf{R}^3$ i $f': U' \rightarrow S' = f'(U') \subset \mathbf{R}^3$ són isomètriques, $K_{f(u)} = K'_{r(u)}$, on $K_{f(u)}$ designa la curvatura de Gauss de S en $f(u)$ i $K'_{r(u)}$ la curvatura de Gauss de S' en $r(u) = f'(\varphi(u))$.*

Comentari. Com que la curvatura de Gauss d'una esfera de radi 1 és 1 en tot punt, i com que la curvatura de Gauss d'un pla és 0, el teorema implica que no pot existir cap isometria entre un tros d'esfera i un tros de pla. Això té com a conseqüència que no es pot representar un tros de la superfície terrestre sobre un tros de pla conservant les distàncies entre la realitat i el paper. No poden existir mapes (plans) de la Terra que conservin les distàncies.

DEMOSTRACIÓ. Entre els diversos mètodes de demostració d'aquest teorema,

nosaltres seguirem el de la referència mòbil, degut a Elie Cartan a començament d'aquest segle. Sigui $f: U \rightarrow S = f(U) \subset \mathbf{R}^3$ una superfície parametritzada de $\mathbf{R}^3$. Sigui $\vec{n}$ un dels dos camps normals unitaris, escollit una vegada per totes. Una referència mòbil de S consisteix, per definició, a assignar a cada punt $x = f(u) \in S$ una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$, $\{(\vec{e}_1)_{f(u)}, (\vec{e}_2)_{f(u)}, (\vec{e}_3)_{f(u)}\}$ de manera que $(\vec{e}_3)_{f(u)}$ sigui $\vec{n}_{f(u)}$. Com que $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ són perpendiculars a $\vec{n}$, seran tangents. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ seran camps vectorials de $\mathbf{R}^3$ amb suport a S . Suposem que aquests camps són diferenciables, la qual cosa equival a dir que si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ és una base fixa de $\mathbf{R}^3$ i $\vec{e}_i$ s'expressa $(\vec{e}_i)_{f(u)} = \sum_j a_i^j(u^1, u^2) \varepsilon_j$, les funcions $a_i^j(u^1, u^2)$ són diferenciables. ¿Com podríem aconseguir una tal referència mòbil diferenciable? Per exemple, de la manera següent. Anomenem $\{e_1, e_2\}$ la base de $T_{f(u)}(S)$ obtinguda pel mètode d'ortonormalització de Smith a partir de la base $\{\partial \vec{f} / \partial u^1, \partial \vec{f} / \partial u^2\}$. Llavors $\{e_1, e_2, e_3\}$ amb $\vec{e}_3 = \vec{n}$ és una referència mòbil diferenciable.

Sigui, doncs, $\{e_1, e_2, e_3\}$ una referència mòbil diferenciable (construïda de la manera anterior o d'una altra). Diferenciem els camps $\vec{e}_i$ (camps de $\mathbf{R}^3$ amb suport a S) com a 0-formes vectorials. Com que $d\vec{e}_i$ ha de ser, en cada punt $x = f(u)$, un element de $T_{f(u)}(S)^* \otimes \mathbf{R}^3$, tindrem expressions de la forma següent:

$$d\vec{e}_i = \sum_j \omega_i^j \otimes \vec{e}_j; \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.7)$$

on les ω_i^j seran 1-formes ordinàries sobre S .

L'aplicació $f: U \rightarrow S = f(U) \subset \mathbf{R}^3$ dona lloc a un camp vectorial amb suport a S , el camp que assigna a cada $x = f(u) \in S$ el vector $f(u) \in \mathbf{R}^3$. Designem per $\vec{f}$ aquest camp. D'acord amb la definició de diferencial d'una 0-forma vectorial, tindrem:

$$d\vec{f} = du^1 \otimes \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} + du^2 \otimes \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}. \quad (3.8)$$

Designem per $\{\theta^1, \theta^2\}$ la base dual de $\{e_1, e_2\}$, com a base de $T_x(S)$ en cada $x = f(u) \in S$. La fórmula (3.8) equival a

$$d\vec{f} = \theta^1 \otimes e_1 + \theta^2 \otimes e_2, \quad (3.9)$$

ja que els segons membres de les dues expressions (3.8) i (3.9), pensats com a aplicacions lineals de $T_x(S)$ a $\mathbf{R}^3$, són la injecció canònica $T_x(S) \hookrightarrow \mathbf{R}^3$ (i, per tant, coincideixen). Si X és un camp vectorial qualsevol de S (tangent), aplicant els dos membres de (3.7) a X , obtenim

$$\nabla_X \vec{e}_i = \sum_j \omega_i^j(X) \vec{e}_j. \quad (3.10)$$

Les expressions (3.7) i (3.10) són equivalents. Derivant la identitat $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ en la direcció del camp X , obtenim

$$g(\nabla_X e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_X e_j) = 0.$$

O sigui,

$$\sum_k \omega_i^k(X) \delta_{kj} + \sum_k \delta_{ik} \omega_j^k(X) = 0.$$

O sigui, $\omega_i^j(X) + \omega_j^i(X) = 0$, la qual cosa ens diu que la matriu (ω_i^j) de 1-formes és antisimètrica. En arribar aquí, voldríem fer la convenció següent: quan utilitzem les primeres lletres de l'alfabet, $a, b, c, \dots$, com a índexs, suposarem que només varien d'1 a 2. En canvi, quan utilitzem $i, j, k, \dots$, suposarem que varien d'1 a 3. Diferenciant exteriorment l'expressió (3.7), tindrem

$$\begin{aligned} 0 &= d(d\vec{e}_i) = \sum_j d\omega_i^j \otimes e_j - \sum_{j,k} \left(\omega_i^j \wedge \omega_j^k \right) \otimes e_k = \\ &= \sum_k \left(d\omega_i^k - \sum_j \omega_i^j \wedge \omega_j^k \right) \otimes e_k. \end{aligned}$$

Per tant,

$$d\omega_i^k = \sum_j \omega_i^j \wedge \omega_j^k. \quad (3.11)$$

Diferenciant (3.9), s'obté

$$\begin{aligned} 0 &= d(df) = \sum_a d\theta^a \otimes e_a - \sum_{a,b} (\theta^a \wedge \omega_a^b) \otimes e_b - \sum_a (\theta^a \wedge \omega_a^3) \otimes e_3 = \\ &= \sum_b (d\theta^b - \sum_a \theta^a \wedge \omega_a^b) \otimes e_b - \sum_a (\theta^a \wedge \omega_a^3) \otimes e_3. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{cases} d\theta^b &= \sum_a \theta^a \wedge \omega_a^b \\ 0 &= \sum_a \theta^a \wedge \omega_a^3. \end{cases} \quad (3.12)$$

Com a cas particular de (3.11) tenim l'equació de Gauss:

$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = -\omega_1^3 \wedge \omega_2^3. \quad (3.13)$$

Ara voldríem demostrar la identitat següent:

$$d\omega_1^2 = -K\theta^1 \wedge \theta^2, \quad (3.14)$$

on K és la curvatura de Gauss. Primer demostrarem que cada un dels dos membres de la identitat (3.14) no depèn de la referència mòbil $\{e_1, e_2, e_3\}$ concreta en què l'expressem. En efecte, suposem que partim d'una altra referència mòbil $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ ($\vec{e}_3$ és sempre $\vec{n}$). Suposem que

$$\vec{e}_a = \sum A_a^b \vec{\varepsilon}_b \quad (3.15)$$

és el canvi de base. La matriu (A_a^b) serà ortogonal. Si X és un camp vectorial de S (tangent), tindrem

$$g(\nabla_X e_1, e_2) = \sum_i \omega_1^i(X) \delta_{i2} = \omega_1^2(X).$$

Anàlogament, si anomenem $\tilde{\omega}_1^2$ la 1-forma anàloga a ω_1^2 corresponent a la referència $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, tindrem

$$\tilde{\omega}_1^2(X) = g(\nabla_X \varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Derivant (3.15), tindrem

$$\begin{aligned} \nabla_X e_1 &= \sum_b (X(A_1^b) \varepsilon_b + A_1^b \nabla_X \varepsilon_b) = \sum_c (X(A_1^c) + \sum_b A_1^b \tilde{\omega}_b^c(X)) \varepsilon_c = \\ &= \sum_d \left(\sum_c X(A_1^c) B_c^d + \sum_{b,c} A_1^b \tilde{\omega}_b^c(X) B_c^d \right) e_d, \end{aligned}$$

on B és la matriu inversa de A , que, com que és ortogonal, és la transposada. Per tant,

$$\begin{aligned} \omega_1^2(X) &= g(\nabla_X e_1, e_2) = \sum_c X(A_1^c) A_2^c + \sum_{b,c} A_1^b \tilde{\omega}_b^c(X) A_2^c = \\ &= \sum_c X(A_1^c) A_2^c + A_1^1 \tilde{\omega}_1^2(X) A_2^2 + A_1^2 \tilde{\omega}_2^1(X) A_2^1 = \\ &= \sum_c X(A_1^c) A_2^c + (\det A) \tilde{\omega}_1^2(X). \end{aligned}$$

Anomenem ε el determinant de A , que és ± 1 . Tindrem

$$\omega_1^2 = \sum_a (dA_1^a) A_2^a + \varepsilon \tilde{\omega}_1^2.$$

Diferenciant exteriorment,

$$d\omega_1^2 = - \sum_a dA_1^a \wedge dA_2^a + \varepsilon d\tilde{\omega}_1^2.$$

Ara bé, tenint en compte que A és una matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \varepsilon \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \varepsilon \cos \varphi \end{pmatrix},$$

on φ és una funció de $u = (u^1, u^2)$, cada terme $dA_1^a \wedge dA_2^a$ s'anul·la per contenir dues $d\varphi$. Per tant, $d\omega_1^2 = \varepsilon d\tilde{\omega}_1^2$. Preocupem-nos ara de veure com canvia el segon membre de (3.14) quan s'utilitza una altra referència. Si $\{\tilde{\theta}^1, \tilde{\theta}^2\}$ és la base dual de $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, tindrem

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^b &= \sum A_c^b \theta^c \\ \tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\theta}^2 &= (\det A) \theta^1 \wedge \theta^2 = \varepsilon \theta^1 \wedge \theta^2. \end{aligned}$$

Hem vist, doncs, que cada un dels dos membres de la identitat (3.14) no depèn de la referència mòbil concreta en què l'expressem.

Si α és la segona forma quadràtica fonamental de S i X és un camp tangent, tindrem

$$\alpha(X, e_a) = g(\nabla_X e_a, e_3) = \sum \omega_a^i(X) \delta_{i3} = \omega_a^3(X).$$

Si utilitzem una referència en la qual e_1 i e_2 siguin direccions principals, tindrem

$$\begin{aligned} \omega_1^3(e_1) &= \alpha(e_1, e_1) = \rho_1 \\ \omega_1^3(e_2) &= \alpha(e_2, e_1) = 0. \end{aligned}$$

Per tant, en aquesta referència, $\omega_1^3 = \rho_1 \theta^1$. Anàlogament es veu que, en aquesta referència, $\omega_2^3 = \rho_2 \theta^2$. Com que $\rho_1 \cdot \rho_2 = K$, la identitat (3.13), que és certa sempre, s'escriu de la manera següent en aquesta referència: $d\omega_1^2 = -K\theta^1 \wedge \theta^2$. Com que (3.14) no depèn de la referència concreta utilitzada, i com que és certa per la referència en què e_1 i e_2 són direccions principals, és certa sempre.

Com que ω_1^2 és una 1-forma, en cada punt serà una combinació lineal de la base $\{\theta^1, \theta^2\}$, $\omega_1^2 = \lambda\theta^1 + \mu\theta^2$. De (3.12) es desprèn

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \theta^2 \wedge \omega_2^1 = -\theta^2 \wedge (\lambda\theta^1 + \mu\theta^2) = \lambda\theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 &= \theta^1 \wedge \omega_1^2 = \theta^1 \wedge (\lambda\theta^1 + \mu\theta^2) = \mu\theta^1 \wedge \theta^2. \end{aligned}$$

Resumim els càlculs que hem fet. Hem partit d'una referència mòbil (ortonormal) $\{e_1, e_2, e_3\}$. Hem anomenat $\{\theta^1, \theta^2\}$ la base dual de $\{e_1, e_2\}$. Siguin λ i μ les funcions determinades per les fórmules

$$\begin{cases} d\theta^1 = \lambda\theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 = \mu\theta^1 \wedge \theta^2. \end{cases} \quad (3.16)$$

Llavors ω_1^2 és la 1-forma $\omega_1^2 = \lambda\theta^1 + \mu\theta^2$, i la curvatura de Gauss ve determinada per la fórmula $d\omega_1^2 = -K\theta^1 \wedge \theta^2$. En tot aquest procés de càlcul, e_3 no intervé en absolut. (e_3 ha intervingut en les demostracions, però no figura en els resultats finals que ara resumim.) Només hi intervé la mètrica g a l'espai tangent $T_x(S)$ (concepte de base ortonormal en aquest espai). Per tant, la curvatura de Gauss K només depèn de la mètrica a S . Per tant, dues superfícies isomètriques tindran la mateixa curvatura de Gauss. ■

Aquest procés, a més de provar el teorema de Gauss, pot ser utilitzat com a eina pràctica de càlcul. Posem-ne un exemple. Considerem un dels exemples de l'apartat 2.1, el tor S donat per $\vec{f}(\varphi, \psi) = ((r_0 + a \cos \varphi) \cos \psi, (r_0 + a \cos \varphi) \sin \psi, a \sin \varphi)$. Els coeficients de la primera forma quadràtica fonamental calculats a l'apartat 2.3 són $E = a^2$, $F = 0$, $G = (r_0 + a \cos \varphi)^2$. La base $\{\partial \vec{f} / \partial \varphi, \partial \vec{f} / \partial \psi\}$ és perpendicular (ja que $F = 0$), però no ortonormal. La base

$$e_1 = \frac{1}{a} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi}, \quad e_2 = \frac{1}{r_0 + a \cos \varphi} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \psi}$$

serà ortonormal. La seva base dual serà

$$\theta^1 = a d\varphi \quad \theta^2 = (r_0 + a \cos \varphi) d\psi. \quad (3.17)$$

En efecte, $\theta^1(e_1) = 1$, $\theta^1(e_2) = 0$, $\theta^2(e_1) = 0$, $\theta^2(e_2) = 1$. Diferenciant exteriorment (3.17), obtenim

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= 0 \\ d\theta^2 &= -a \sin \varphi d\varphi \wedge d\psi = -\frac{\sin \varphi}{r_0 + a \cos \varphi} \theta^1 \wedge \theta^2. \end{aligned}$$

Per tant, en virtut de (3.16), tindrem $\lambda = 0$ i $\mu = -\sin \varphi / (r_0 + a \cos \varphi)$. Per tant,

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \lambda\theta^1 + \mu\theta^2 = -\frac{\sin \varphi}{r_0 + a \cos \varphi} \theta^2 = -\sin \varphi d\psi. \\ d\omega_1^2 &= -\cos \varphi d\varphi \wedge d\psi = -\frac{\cos \varphi}{a(r_0 + a \cos \varphi)} \theta^1 \wedge \theta^2. \end{aligned}$$

La fórmula (3.14) ens diu que la curvatura de Gauss és

$$K = -\frac{\cos \varphi}{a(r_0 + a \cos \varphi)}.$$

Observem que hem calculat K a partir només dels coeficients E, F i G de la primera forma fonamental. Per tant, una altra superfície de $\mathbf{R}^3$ amb els mateixos coeficients E, F i G haurà de tenir la mateixa curvatura de Gauss.

Capítol 4

Varietats diferenciables

1 Espais topològics paracompactes

Malgrat que en aquest text suposarem coneguts tots els conceptes de topologia general que s'hi utilitzen, aquí farem una excepció i resumirem breument les propietats d'espais paracompactes que necessitarem en el present capítol.

Siguin $\{U_i\}_{i \in I}$ i $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ dos recobriments per oberts d'un espai topològic M . Direm que el primer recobriment és un *refinament* del segon si existeix una aplicació $\varphi: I \rightarrow A$ amb la propietat que $U_i \subset V_{\varphi(i)}$. Això equival a dir, en altres paraules, que tot obert del primer recobriment està contingut en algun del segon. Direm que un recobriment $\{U_i\}_{i \in I}$ de M és *localment finit* si tot punt de M té un entorn que talla només un nombre finit d'oberts del recobriment. Un espai topològic M es diu *paracompacte* si tot recobriment de M per oberts admet un refinament localment finit. La definició que acabem de donar no és, però, gaire il·lustrativa de com és un espai paracompacte. Hauríem de donar criteris més pràctics de paracompacitat. Comencem observant que tot espai compacte és, en particular, paracompacte. En efecte, si M és compacte, tot recobriment $\{U_i\}_{i \in I}$ de M admet un subrecobriment finit $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_k}\}$. Ara bé, aquest subrecobriment és, en particular, un refinament de $\{U_i\}_{i \in I}$, que és localment finit, per ser finit.

A part dels espais compactes, donem altres exemples d'espais paracompactes. Comencem per $\mathbf{R}^n$. Provarem a continuació que $\mathbf{R}^n$ és paracompacte. Per a $j = 1, 2, 3, \dots$, sigui X_j la bola tancada de centre l'origen i radi j . Es compleix, òbviament, que $\mathbf{R}^n$ és reunió de tots els subconjunts compactes X_j , $\mathbf{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$, i que $X_j \subset \mathring{X}_{j+1}$, on $\mathring{X}_{j+1}$ designa l'interior de X_{j+1} . Per a $j = 2, 3, \dots$, sigui $B_j = \mathring{X}_{j+2} - X_{j-1}$ i $C_j = X_{j+1} - \mathring{X}_j$. Els B_j són anelles concèntriques obertes i els C_j són anelles tancades amb $B_j \supset C_j$. Per a $j = 1$

posem $B_1 = \overset{\circ}{X}_3$ i $C_1 = X_2$. Tenim

$$\mathbf{R}^n = \cup_{j=1}^{\infty} B_j, \quad \mathbf{R}^n = \cup_{j=1}^{\infty} C_j, \quad B_j \supset C_j.$$

A més, cada punt de $\mathbf{R}^n$ té un entorn que talla, com a màxim, dos C_j . Utilitzant aquestes propietats, demostrem que $\mathbf{R}^n$ és paracompacte. Sigui $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recobriment de $\mathbf{R}^n$ per oberts. Hem de construir un refinament localment finit. Per a cada $j = 1, 2, \dots$, $\{U_\alpha \cap B_j\}_{\alpha \in A}$ és un recobriment de C_j per oberts. Com que C_j és compacte, sigui A_j un subconjunt finit de A tal que $\{U_\alpha \cap B_j\}_{\alpha \in A_j}$ cobreixi C_j . Designem per $\{V_\beta\}$ el recobriment de $\mathbf{R}^n$ format per tots els $\{U_\alpha \cap B_j\}_{\alpha \in A_j}$ corresponents a tots els j , quan $j = 1, 2, \dots$. Òbviament, $\{V_\beta\}$ és un refinament del recobriment inicial $\{U_\alpha\}$, ja que qualsevol V_β està contingut en algun U_α . A més, $\{V_\beta\}$ és localment finit ja que cada punt de $\mathbf{R}^n$ té un entorn que talla com a màxim dos C_j . Per tant, aquest entorn tallarà, com a màxim, els $\{U_\alpha \cap B_j\}_{\alpha \in A_j}$ corresponents a aquests dos j .

Per donar més exemples d'espais paracompactes, recordem que un espai es diu *localment compacte* si tot punt té un entorn d'adherència compacta. ($\mathbf{R}^n$, per exemple, és localment compacte.) Es pot adaptar la demostració anterior del fet que $\mathbf{R}^n$ és paracompacte per demostrar que tot espai topològic localment compacte amb una *base numerable d'oberts* és paracompacte. Vegem-ho. Sigui M un espai topològic localment compacte amb base numerable d'oberts. A partir de qualsevol base numerable d'oberts de M se'n pot construir una altra, $\{U_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, amb la propietat que les adherències $\bar{U}_i$ siguin compactes. Sigui $X_1 = \bar{U}_1$. Sigui k_1 el nombre natural més petit per al qual la reunió $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{k_1}$ conté X_1 . Sigui $X_2 = \bar{U}_1 \cup \dots \cup \bar{U}_{k_1}$. Així construïm, inductivament, una successió de compactes $X_1, X_2, X_3 \dots$ amb la propietat que $X_j \subset \overset{\circ}{X}_{j+1}$ i que $M = \cup_{j=1}^{\infty} X_j$. Quan arribem a aquesta situació reproduïm el mateix raonament que hem utilitzat per demostrar que $\mathbf{R}^n$ era paracompacte i obtenim, aquí, la paracompacitat de M .

2 Definició de varietat diferenciable i exemples

Al capítol anterior consideràvem superfícies de $\mathbf{R}^3$. Vèiem, però, que els exemples que allà donàvem (l'esfera i el tor) no complien la definició de superfície parametritzada de $\mathbf{R}^3$. Donem ara una definició de varietat que inclogui els exemples del capítol anterior. Comencem definint el concepte d'atlas.

Sigui M un espai topològic. Un *atlas* de classe C^∞ sobre M i de dimensió n és una col·lecció de parells $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, on U_i és un obert de M i φ_i un homeomorfisme de U_i sobre un obert de $\mathbf{R}^n$, que compleix les condicions següents:

- 1) $M = \cup_{i \in I} U_i$.

2) Per a cada parell $i, j \in I$ tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'aplicació

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}} \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

és una aplicació C^∞ de l'obert $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ de $\mathbf{R}^n$ en l'obert $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ de $\mathbf{R}^n$. (Recordeu que el concepte d'aplicació diferenciable entre oberts d'espais euclidians és un concepte ja definit en qualsevol curs elemental d'anàlisi.)

Els parells (U_i, φ_i) s'anomenen *cartes locals* de l'atlas. Substituint a la condició 2) l'expressió C^∞ per C^r , definírem el concepte d'atlas de classe C^r .

Per posar un exemple, considerem l'esfera $S^n(r)$ de radi r centrada a l'origen de $\mathbf{R}^{n+1}$. Si anomenem N el pol nord (de coordenades $(0, 0, \dots, 0, r)$) i S el pol sud $(0, 0, \dots, 0, -r)$, sigui $U_1 = S^n(r) - \{N\}$ i $U_2 = S^n(r) - \{S\}$. Siguin $\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$ la projecció estereogràfica des del pol nord sobre el pla $x^{n+1} = 0$ de l'equador. Siguin $\varphi_2: U_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$ la projecció estereogràfica des del pol sud sobre el pla de l'equador. És fàcil comprovar que $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ constitueix un atlas C^∞ i de dimensió n .

Si $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ és un atlas de M i $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ és un altre atlas, anomenarem reunió dels dos atlas la col·lecció $\{(U_i, \varphi_i), (V_j, \psi_j)\}_{i \in I; j \in J}$ de tots els parells del primer i del segon atlas.

La reunió de dos atlas no ha de ser forçosament un altre atlas. Perquè fos així s'hauria de complir que, si $U_i \cap V_j \neq \emptyset$,

$$\varphi_i(U_i \cap V_j) \xrightarrow{\psi_j \circ \varphi_i^{-1}} \psi_j(U_i \cap V_j)$$

fos sempre un difeomorfisme entre els oberts $\varphi_i(U_i \cap V_j)$ i $\psi_j(U_i \cap V_j)$.

Direm que dos atlas de dimensió n i classe C^∞ són *equivalents* si la seva reunió encara és un atlas de dimensió n i classe C^∞ .

Una *varietat diferenciable* de dimensió n i classe C^∞ és, per definició, un espai topològic M , Hausdorff, paracompacte, dotat d'una *classe d'equivalència d'atlas* de dimensió n i classe C^∞ .

Segons aquesta definició, l'esfera $S^n(r)$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ dotada de l'atlas anterior ens proporciona un exemple de varietat diferenciable de classe C^∞ i dimensió n .

La condició de paracompacitat que es demana de l'espai topològic M és només per poder tenir particions diferenciables de la unitat, que definirem més endavant.

Altres exemples senzills de varietats diferenciables són els següents:

1) $\mathbf{R}^n$ és una varietat diferenciable amb l'atlas d'una sola carta local $(\mathbf{R}^n, \text{id})$.

2) Al capítol anterior hem considerat superfícies parametritzades de $\mathbf{R}^3$, (U, f) , on U era un obert de $\mathbf{R}^2$ i f una aplicació diferenciable injectiva, $f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$, tal que l'aplicació lineal tangent $f'(u)$ en cada $u \in U$ fos injectiva. Un parell (U, f) , on ara U és obert de $\mathbf{R}^m$ (en lloc de ser-ho de $\mathbf{R}^2$) i f és una aplicació de U en $\mathbf{R}^n$, $m < n$, amb les propietats anteriors, s'anomena subvarietat parametritzada de $\mathbf{R}^n$ de dimensió m . Doncs bé, sigui (U, f) una subvarietat parametritzada de $\mathbf{R}^n$ de dimensió m . Posem $M = f(U) \subset \mathbf{R}^n$. Dotem M de la topologia que consisteix a dir que un subconjunt de M és obert si i només si és imatge per f d'un obert de U . Amb aquesta topologia a M , l'aplicació f serà, òbviament, un homeomorfisme entre U i M . Podem considerar llavors l'estructura de varietat diferenciable (de dimensió m) sobre M donada per l'atlas d'una sola carta local (M, f^{-1}) . (La topologia que hem introduït a M pot no coincidir amb la topologia induïda per $\mathbf{R}^n$ (penseu-ne un contraexemple).)

Per il·lustrar el concepte de varietat diferenciable, donem-ne un exemple de naturalesa diferent: l'espai projectiu $P_n(\mathbf{R})$.

A $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ definim la relació d'equivalència $x \sim y$ si i només si existeix $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que $x = \lambda y$. $P_n(\mathbf{R})$ és llavors, per definició, l'espai topològic quocient de $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ mòdul $\sim$. Anomenem π la projecció canònica

$$\pi: \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow P_n(\mathbf{R}).$$

Donat $u \in P_n(\mathbf{R})$, un element qualsevol de $\pi^{-1}(u)$ és de la forma $(x^0 \dots x^n)$. Direm que $(x^0 \dots x^n)$ són coordenades homogènies de u . Siguí $U_0 = \{u \in P_n(\mathbf{R}) \text{ tals que les seves coordenades homogènies } (x^0(u), \dots, x^n(u)) \text{ compleixen } x^0(u) \neq 0\}$. Anàlogament definim U_i , per a $i = 1 \dots n$, per la condició $x^i(u) \neq 0$. Definim φ_0 per

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{R}^n \\ u & \mapsto & \left(\frac{x^1(u)}{x^0(u)}, \dots, \frac{x^n(u)}{x^0(u)} \right). \end{array}$$

En general, definim φ_i per

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{R}^n \\ u & \mapsto & \left(\frac{x^0(u)}{x^i(u)}, \dots, \frac{x^{i-1}(u)}{x^i(u)}, \frac{x^{i+1}(u)}{x^i(u)}, \dots, \frac{x^n(u)}{x^i(u)} \right). \end{array}$$

És fàcil veure que $\{(U_0, \varphi_0), (U_1, \varphi_1), \dots, (U_n, \varphi_n)\}$ és un atlas de classe C^∞ i dimensió n , que dota $P_n(\mathbf{R})$ d'una estructura de varietat diferenciable. Aquest exemple és de naturalesa diferent a tots els anteriors ja que aquí $P_n(\mathbf{R})$ no es

presenta com si estigués ficat dintre de cap $\mathbf{R}^n$, com passava en els exemples anteriors.

Hem dit abans que la condició de paracompacitat que es demana a l'espai topològic M en la definició de varietat diferenciable és una condició “tècnica” que s'utilitzarà més endavant quan demostrem l'existència de particions de la unitat. De fet, si M és un espai topològic dotat d'un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de dimensió n i classe C^∞ , com que cada punt de M té un entorn homeomorf (per una carta local) a un obert de $\mathbf{R}^n$, M és localment compacte. Pel que hem dit a l'apartat 1, basta, doncs, que M tingui una base numerable d'oberts perquè sigui automàticament paracompacte. La condició de paracompacitat exigida en la definició de varietat diferenciable no és gens restrictiva. Els únics exemples que serien varietats diferenciables si no haguéssim exigut la paracompacitat de l'espai topològic i que ara, amb l'exigència d'aquesta condició, no ho són, són exemples absolutament extravagants com el següent:

Sigui X l'espai topològic $\mathbf{R}^3$ amb la topologia que consisteix a anomenar obert un conjunt U de $\mathbf{R}^3$ si i només si la intersecció de U amb qualsevol pla horitzontal de la forma $z = a$ és un obert en el sentit usual (X és reunió disjunta de tots els $\mathbf{R}^2 \times \{a\}$ quan $a \in \mathbf{R}$. Es pren a X la topologia on cada $\mathbf{R}^2 \times \{a\}$ és una component connexa i on a cada $\mathbf{R}^2 \times \{a\}$ la topologia coincideix amb la usual). Definim a X la relació d'equivalència següent: $(x, y, a) \sim (x', y', b)$ si i només si o bé $y = y' > 0$ i $xy + a = x'y' + b$, o bé $y = y' \leq 0$ i $x = x'$ i $a = b$. Sigui M el quocient $X/\sim$, amb la topologia quocient. Sigui π la projecció canònica $X \rightarrow M$. Per a cada $a \in \mathbf{R}$ sigui $U_a = \mathbf{R}^2 \times \{a\} \subset X$. U_a és un obert de X . Sigui $V_a = \pi(U_a)$. V_a és un obert de M . $\pi: U_a \rightarrow V_a$ és un homeomorfisme per a qualsevol $a \in \mathbf{R}$. Sigui φ_a la composició

$$V_a \xrightarrow{\pi^{-1}} U_a = \mathbf{R}^2 \times \{a\} \longrightarrow \mathbf{R}^2.$$

És fàcil veure que $\{(V_a, \varphi_a)\}_{a \in \mathbf{R}}$ és un atlas de M de dimensió 2 i classe C^∞ i que, en canvi, M no és un espai paracompacte.

3 Aplicacions diferenciables entre varietats; espai tangent

Sigui M una varietat diferenciable i $\{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlas de M . Direm que un parell (U, φ) , on U és un obert de M i φ un homeomorfisme de U en un obert de $\mathbf{R}^n$, és una *carta local admissible* de M si la col·lecció $\{(U, \varphi), (U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ és un atlas de M . Siguin M i N dues varietats diferenciables de dimensions possiblement diferents. Sigui $p \in M$. Una aplicació $f: M \rightarrow N$ es diu diferenciable en el punt p si existeixen cartes locals admissibles de M i N , $(U, \varphi), (V, \psi)$,

amb $p \in U$, tals que $f(U) \subset V$ i tals que l'aplicació

$$\varphi(U) \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} \psi(V)$$

és diferenciable en el punt $\varphi(p)$. (Aquesta aplicació és entre oberts d'espais euclidians.) Es pot veure immediatament que si aquesta condició es compleix per a (U, φ) i (V, ψ) , també es compleix per a qualsevol parell (U', φ') , (V', ψ') de cartes locals admissibles de M i N que compleixin $p \in U'$, $f(U') \subset V'$.

L'aplicació $f: M \rightarrow N$ es diu diferenciable si és diferenciable en tots els punts.

Com que $\mathbf{R}$ és una varietat diferenciable de manera natural, tota aplicació diferenciable $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ es diu *funció diferenciable*.

Remuntant-nos a les definicions, podem dir que una funció $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ és diferenciable si per a un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ de M es compleix que les funcions $f \circ \varphi_i^{-1}$ són diferenciables sobre $\varphi_i(U_i)$.

Com que tot obert U d'una varietat diferenciable M hereta de manera natural una estructura de varietat diferenciable, direm que una funció f sobre U és diferenciable quan ho sigui considerant U com a varietat diferenciable total.

Al capítol anterior hem definit el concepte d'espai tangent en un punt d'una superfície de $\mathbf{R}^3$. Procedint de manera anàloga, voldríem definir aquí el concepte d'espai tangent en un punt p d'una varietat diferenciable M . Però aquí, a diferència d'allò que passava al capítol anterior, M no està ficada dintre de cap $\mathbf{R}^m$, en principi.

Una petita corba $x(t)$ de M és per definició una aplicació diferenciable d'un interval obert $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ de $\mathbf{R}$ en M , $t \rightarrow x(t)$. Definim vector tangent $\dot{x}(0)$ a aquesta corba en el punt $x(0) \in M$ com l'operador que a tota funció diferenciable f definida en un petit entorn de $x(0)$ li associa el nombre real $(df(x(t))/dt)_{t=0}$. Observeu que $t \rightarrow f(x(t))$ és una funció diferenciable ordinària de la variable t , ja que prenent una petita carta local admissible (U, φ) que contingui $x(0)$ es té $f(x(t)) = f(\varphi^{-1}(\varphi(x(t))))$, i $\varphi \circ x$ és diferenciable perquè $x(t)$ és una corba diferenciable, i $f \circ \varphi^{-1}$ és diferenciable perquè f és diferenciable.

Si $\dot{x}(0)$ és el vector tangent a la corba $x(t)$ en $x(0)$ i $\dot{y}(0)$ el vector tangent a $y(t)$ en $y(0)$, i si $x(0) = y(0) = p$, llavors definim la suma $\dot{x}(0) + \dot{y}(0)$ com l'operador que actuant sobre una f diferenciable definida en un petit entorn de p , val

$$(\dot{x}(0) + \dot{y}(0))(f) = \dot{x}(0)(f) + \dot{y}(0)(f).$$

També definim el producte de $\dot{x}(0)$ per un escalar λ com l'operador donat per

$$(\lambda \dot{x}(0))(f) = \lambda \dot{x}(0)(f).$$

Proposició 4.1 *La suma $\dot{x}(0) + \dot{y}(0)$ és el vector tangent a una corba que passa per p . També $\lambda \dot{x}(0)$ és el vector tangent a una corba que passa per p .*

DEMOSTRACIÓ. Les dues afirmacions de la proposició es demostren de manera anàloga. Farem només la demostració de la primera. Prenguem una carta local (U, φ) amb $p \in U$. Podem suposar (substituint si cal φ per $\varphi \circ T$, on T és una translació de $\mathbf{R}^n$) que $\varphi(p)$ és l'origen de $\mathbf{R}^n$. Per tal de no sobrecarregar les notacions, identificarem els punts de U amb els punts de $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$ a través de φ . Amb aquesta identificació, p serà $(0 \dots 0) \in \mathbf{R}^n$, i les corbes $x(t)$, $y(t)$ donaran corbes $(x^1(t) \dots x^n(t))$ i $(y^1(t) \dots y^n(t))$ de $\mathbf{R}^n$. Considerem la corba de $\mathbf{R}^n$

$$t \rightarrow \left((\dot{x}^1(0) + \dot{y}^1(0))t, \dots, (\dot{x}^n(0) + \dot{y}^n(0))t \right),$$

on $\dot{x}^i(0)$ i $\dot{y}^i(0)$ indiquen derivades ordinàries a l'origen de les funcions $x^i(t)$, $y^i(t)$. El vector tangent a aquesta corba, considerada com a corba de M a través de φ , serà, segons la definició, l'operador X definit per

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{d}{dt} f \left((\dot{x}^1(0) + \dot{y}^1(0))t, \dots, (\dot{x}^n(0) + \dot{y}^n(0))t \right)_{t=0} = \\ &= \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_0 (\dot{x}^i(0) + \dot{y}^i(0)) = \frac{d}{dt} f(x^1(t) \dots x^n(t))_{t=0} + \\ &+ \frac{d}{dt} f(y^1(t) \dots y^n(t))_{t=0} = \dot{x}(0)(f) + \dot{y}(0)(f). \blacksquare \end{aligned}$$

Proposició 4.2 *L'espai vectorial $T_p(M)$ dels vectors tangents en el punt p a corbes que passen per p té dimensió n (on n és la dimensió de la varietat M).*

DEMOSTRACIÓ. Amb les identificacions i notacions de la demostració de la proposició anterior, el vector X tangent a la corba $t \rightarrow (0, 0 \dots, t, \dots, 0)$ (t en el lloc i) és l'operador

$$X(f) = \frac{d}{dt} f(0 \dots t \dots 0)_{t=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_0.$$

Anomenem $(\partial/\partial x^i)_0$ aquest operador. Es tracta de demostrar que $(\partial/\partial x^1)_0 \dots (\partial/\partial x^n)_0$ són base de $T_p(M)$. Que engendren $T_p(M)$ és obvi, ja que per a una corba qualsevol $x(t)$ tal que $x(0) = p$ es té

$$\dot{x}(0)(f) = \left(\frac{df(x(t))}{dt} \right)_{t=0} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_0 \dot{x}^i(0).$$

Provem que són linealment independents. Si $\sum \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_0 = 0$, aplicant aquest operador a la funció x^j es té $\sum \lambda^i \delta_{ij} = 0$, és a dir, $\lambda^j = 0$. $\blacksquare$

Aplicació lineal tangent. Sigui $f: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable entre dues varietats. Sigui $p \in M$. L'aplicació lineal tangent de f en el punt p , que designarem per $(df)_p$, o bé per $(f_x)_p$, o bé per $f'(p)$, és l'aplicació $T_p(M) \rightarrow T_p(N)$ definida de la manera següent. Al vector $\dot{x}(0)$, tangent a la corba $x(t)$, se li associa el vector tangent a la corba $f(x(t))$ de N , en el punt $t = 0$. Sigui (U, φ) una carta local de M tal que $p \in U$, i (V, ψ) una carta local de N amb $f(p) \in V$. Si identifiquem els punts de U amb els de $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$ i els punts de V amb els de $\psi(V) \subset \mathbf{R}^m$, f donarà una aplicació diferenciable

$$(x^1 \dots x^n) \longrightarrow (y^1(x^1 \dots x^n), \dots, y^m(x^1 \dots x^n)).$$

El vector tangent a una corba $t \rightarrow (x^1(t) \dots x^n(t))$ de M serà

$$\sum \dot{x}^i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p.$$

Aquest vector s'aplicarà en el vector tangent a la corba

$$t \rightarrow y^1(x^1(t) \dots x^n(t)), \dots, y^m(x^1(t), \dots, x^n(t)) ,$$

que serà

$$\sum_{i,j} \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_p \dot{x}^j(0) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_{f(p)}.$$

Per tant, l'aplicació lineal tangent de f és l'aplicació lineal que en les bases $\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p$ i $\left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_{f(p)} \dots \left(\frac{\partial}{\partial y^m} \right)_{f(p)}$ té per matriu el jacobí $\left(\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_p \right)$.

4 Camps vectorials, camps tensorials, formes diferencials

Sigui M una varietat diferenciable. Un *camp vectorial* sobre M consisteix a assignar a cada $p \in M$ un $X_p \in T_p(M)$. Sigui (U, φ) una carta local. Si $x^1 \dots x^n$ són les funcions coordenades a què dona lloc la carta local (funcions coordenades de $\mathbf{R}^n$, que a través de la identificació de U amb $\varphi(U)$ són funcions sobre U), llavors, per a $x \in U$, X_x s'expressarà

$$X_x = \sum X^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x.$$

El camp es diu diferenciable si les funcions $X^i(x)$ sobre U ho són, i si això passa per a tota carta local (U, φ) admissible.

Si f és una funció i X un camp vectorial, designarem per $X(f)$ la funció $p \rightarrow X_p(f)$.

Donats dos camps X, Y , es defineix el claudàtor dels dos camps com el camp $[X, Y]$ que assigna a cada punt p el vector tangent $[X, Y]_p$ donat per

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) .$$

Si f és una funció diferenciable definida en un entorn d'un punt p de M , es defineix la *diferencial* de f en p , $(df)_p$, com l'element de $T_p(M)^*$ donat per $(df_p)(X) = X(f)$ per a qualsevol X de $T_p(M)$. Es desprèn de la definició que si (U, φ) és una carta local que contingui p , i $x^1 \dots x^n$ són les funcions coordenades d'aquesta carta, $\{(dx^1)_p \dots (dx^n)_p\}$ és la base dual de $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p \dots (\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$.

Un *camp tensorial* t , k vegades contravariant i r vegades covariant, consisteix a assignar a cada $p \in M$ un element $t_p \in (\otimes^k T_p(M)) \otimes (\otimes^r T_p(M)^*)$. En una carta local (U, φ) , t_x s'expressarà

$$t_x = t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_k}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \right)_x \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right)_x \otimes (dx^{j_1})_x \otimes \dots \otimes (dx^{j_r})_x .$$

(Aquí utilitzem el conveni que hem fet al capítol 1 de suprimir els sumatoris.) El camp es diu diferenciable si per a cada carta local (U, φ) les components $t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_k}(x)$ són funcions diferenciables de $x = (x^1 \dots x^n)$.

Una *r-forma diferencial* ϕ sobre M consisteix a assignar a cada $p \in M$ un element ϕ_p de $\wedge^r T_p(M)^*$. En una carta local es tindrà

$$\phi_x = \sum_{j_1 < \dots < j_r} \phi_{j_1 \dots j_r}(x) (dx^{j_1})_x \wedge \dots \wedge (dx^{j_r})_x .$$

La *r-forma* es diu diferenciable si per a tota carta local les funcions $\phi_{j_1 \dots j_r}(x)$ ho són.

Siguin (U, φ) i (V, ψ) dues cartes locals amb $U \cap V \neq \emptyset$. Sigui $(x^1 \dots x^n)$ les funcions coordenades corresponents a la primera carta local i $(y^1 \dots y^n)$ les de la segona. El canvi de cartes

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

vindrà donat per $(x^1 \dots x^n) \rightarrow (y^1(x^1 \dots x^n), \dots, y^n(x^1 \dots x^n))$. En cada punt p de $U \cap V$ es tindrà

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p &= \sum_j \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p \\ (dy^j)_p &= \sum_i \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p (dx^i)_p . \end{cases} \quad (4.1)$$

Si ϕ és una r -forma diferencial, ϕ s'expressarà sobre U per

$$\begin{aligned}\phi_U &= \sum_{i_1 < \dots < i_r} \phi_{U i_1 \dots i_r}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \\ &= \frac{1}{r!} \phi_{U i_1 \dots i_r}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} .\end{aligned}\tag{4.2}$$

Sobre V tindrem una expressió anàloga

$$\phi_V = \frac{1}{r!} \phi_{V i_1 \dots i_r}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_r} .$$

Tenint en compte (4.1) tindrem, a $U \cap V$

$$\phi_U = \phi_V = \frac{1}{r!} \phi_{V i_1 \dots i_r}(y) \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r} .$$

Ara bé, aquests coeficients no són antisimètrics en $j_1 \dots j_r$. Perquè ho siguin (vegeu capítol 2) haurem de posar

$$\phi = \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{r!} \varepsilon_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_r} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}} \phi_{V i_1 \dots i_r}(y) \right) dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_r} .$$

Iguant amb l'expressió (4.2) tindrem

$$\phi_{U k_1 \dots k_{p+1}}(x) = \frac{1}{r!} \varepsilon_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_r} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}} \phi_{V i_1 \dots i_r}(y(x)) ,\tag{4.3}$$

que és la igualtat que relaciona les components de ϕ en dos sistemes de coordenades diferents.

Es poden trobar condicions anàlogues per a les components de camps tensorials.

La diferencial exterior. Si ϕ és una r -forma diferencial sobre M que en cada carta local s'expressa per (4.2), es defineix la *diferencial exterior* de ϕ com la $(r+1)$ -forma diferencial sobre M donada en cada carta local per

$$\begin{aligned}d\phi &= \frac{1}{r!} d\phi_{i_1 \dots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \\ &= \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{(r+1)!} \varepsilon_{k_1 \dots k_{r+1}}^{j_1 \dots j_r} \frac{\partial \phi_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j} \right) dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_{r+1}} .\end{aligned}$$

(Per a aquesta última igualtat, vegeu el capítol 2.)

Les components de $d\phi$ seran, doncs,

$$d\phi_{k_1 \dots k_{r+1}}(x) = \frac{1}{r!} \varepsilon_{k_1 \dots k_{r+1}}^{j_1 \dots j_r} \frac{\partial \phi_{i_1 \dots i_r}(x)}{\partial x^j}. \quad (4.4)$$

De la condició de compatibilitat (4.3) per a les components de ϕ es dedueix que les components de $d\phi$ també compleixen una condició de compatibilitat anàloga. Per tant, $d\phi$ és una $(r+1)$ -forma (global) que no depèn de les coordenades utilitzades en la seva definició.

5 Formes diferencials i aplicacions multilineals alternades. Imatge inversa d'una forma diferencial per una aplicació

Al capítol 1 hem vist que si E és un espai vectorial, podem identificar $E^* \otimes E^*$ amb l'espai d'aplicacions bilineals de $E \times E$ en $\mathbf{R}$. Anàlogament es pot identificar $\wedge^r E^*$ amb l'espai $A(E, \dots, E; \mathbf{R})$ d'aplicacions multilineals alternades de $E \times \dots \times E$ en $\mathbf{R}$.

Si ϕ és una r -forma diferencial sobre M , en cada punt p podem pensar $\phi_p \in \wedge^r T_p(M)^*$ com un element de $A(T_p(M), \dots, T_p(M); \mathbf{R})$. Així doncs, si $v_1 \dots v_r \in T_p(M)$, té sentit parlar de $\phi_p(v_1 \dots v_r) \in \mathbf{R}$. A vegades ometrem el punt p i escriurem $\phi(v_1 \dots v_r)$.

Sigui $f: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable entre dues varietats M i N . Sigui ϕ una r -forma diferencial sobre N . Sigui $p \in M$. Designarem per $f^*(\phi)_p$ l'element de $\wedge^r T_p(M)^*$ definit per

$$f^*(\phi)_p(v_1 \dots v_r) = \phi_{f(p)}(f'(p)v_1, \dots, f'(p)v_r). \quad (4.5)$$

Sigui (V, ψ) una carta local de N que contingui $y = f(p)$. Si ϕ s'expressa en aquesta carta local per

$$\phi = \frac{1}{r!} \phi_{i_1 \dots i_r}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_r},$$

deixem al lector el treball de comprovar que en una carta local (U, φ) de M que conté p i tal que $f(U) \subset V$, $f^*(\phi)$ s'expressa per

$$f^*(\phi) = \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{r!} \varepsilon_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_r} \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_r}} \dots \frac{\partial f^{i_r}}{\partial x^{j_1}} \phi_{i_1 \dots i_r}(f(x)) \right) dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_r} \quad (4.6)$$

(compareu amb les expressions del capítol 2). Aquesta expressió posa de manifest que si ϕ és diferenciable, $f^*(\phi)$ també ho és, cosa que amb la definició (4.5) no quedava clara.

Del que hem dit al capítol 2 es desprèn que es compleix

$$df^*(\phi) = f^*(d\phi).$$

6 Particions de la unitat

En tot el que hem fet fins ara, encara no hem utilitzat mai la condició de paracompacitat que hem exigit a les varietats diferenciables. Ara introduïrem una tècnica, la de les *particions de la unitat*, que farem servir més endavant per definir la integració. Serà ara quan utilitzem la condició de paracompacitat.

Una propietat important de les varietats diferenciables (paracompactes) és la donada pel lema següent.

Lema 4.3 (Lema de l'encongment) *Sigui M una varietat diferenciable. Si $\{U_i\}_{i \in I}$ és un recobriment de M , existeix un altre recobriment $\{V_i\}_{i \in I}$, amb el mateix conjunt d'índexs I , tal que $\bar{V}_i \subset U_i$.*

DEMOSTRACIÓ. Per a cada $x \in M$ elegim un entorn W'_x de x amb $\bar{W}'_x$ contingut en algun U_i . Sigui $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un refinament localment finit del recobriment $\{W'_x\}_{x \in M}$. Per a cada $i \in I$ considerem $B_i = \{\alpha \in A \text{ tals que } \bar{W}_\alpha \subset U_i\}$. Sigui $V_i = \cup_{\alpha \in B_i} W_\alpha$. Com que $\{W_\alpha\}$ és localment finit, és fàcil veure que $\bar{V}_i = \cup_{\alpha \in B_i} \bar{W}_\alpha$. En efecte, la inclusió $\cup_{\alpha \in B_i} \bar{W}_\alpha \subset \bar{V}_i$ és evident, ja que si $x \in \cup \bar{W}_\alpha$, x és d'algun $\bar{W}_\alpha$. Tot entorn de x talla aquest W_α . Per tant, talla la reunió de tots, que és V_i . Demostrem la inclusió contrària. Prenguem $x \in \bar{V}_i$. Com que $\{W_\alpha\}$ és localment finit, existeix un entorn D de x que només talla un nombre finit de W_α i, encara amb més raó, un nombre finit de W_α amb $\alpha \in B_i$. Siguin $W_1 \dots W_k$ aquests W_α amb $\alpha \in B_i$ que són tallats per D . Com que $x \in \bar{V}_i$, tot entorn S de x contingut a D talla $W_1 \cup \dots \cup W_k$. Per tant, $x \in \overline{W_1 \cup \dots \cup W_k} = \bar{W}_1 \cup \dots \cup \bar{W}_k \subset \cup_{\alpha \in B_i} \bar{W}_\alpha$. Tenim, doncs, $\bar{V}_i = \cup_{\alpha \in B_i} \bar{W}_\alpha \subset U_i$. És obvi que els V_i recobreixen M . ■

Teorema 4.4 *Sigui M una varietat diferenciable, i $\{U_i\}_{i \in I}$ un recobriment de M localment finit tal que cada $\bar{U}_i$ sigui compacte. Llavors, per a cada $i \in I$, existeix una funció diferenciable f_i sobre M de manera que la col·lecció $\{f_i\}_{i \in I}$ compleix les propietats següents:*

- 1) Per a tot $x \in M$, $0 \leq f_i(x) \leq 1$.
- 2) El suport de f_i , que anomenarem $\text{supp } f_i$, està contingut a U_i .
- 3) $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ per a tot $x \in M$.

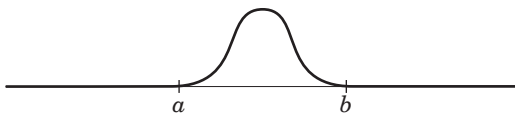


Figura 4.1

El sumatori de la propietat 3) (que pot contenir infinits termes) cal interpretar-lo de la manera següent. Cada $x \in M$ està contingut només en un nombre finit de U_i (perquè el recobriment és localment finit). Per la propietat 2), si $x \notin U_i$, $f_i(x) = 0$. Per tant, fixat x , en el sumatori de la propietat 3) només hi haurà un nombre finit de termes no nuls. Llavors se sumen aquests termes (suma finita).

La col·lecció $\{f_i\}$ s'anomena partició de la unitat a causa de la propietat 3).

Abans de demostrar el teorema necessitem el lema següent.

Lema 4.5 Sigui K un compacte d'una varietat diferenciable M , i U un obert que conté K . Existeix una funció diferenciable f sobre tot M que val 1 sobre K i 0 fora de U .

DEMOSTRACIÓ DEL LEMA. Donats a i $b \in \mathbf{R}$ tals que $0 < a < b$, comencem provant el lema en el cas que $M = \mathbf{R}^n$, que K és la bola tancada de radi $\sqrt{a}$ centrada a l'origen, i que U és la bola oberta de radi $\sqrt{b}$ centrada a l'origen. Sigui $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la funció d'una sola variable definida per

$$\varphi(x) = \exp\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right)$$

si $a < x < b$, i $\varphi(x) = 0$ en cas contrari. És ben conegut que aquesta funció és C^∞ a tots els punts i que té un gràfic com el que indica la figura. Sigui $\Phi(x) = \left(\int_x^b \varphi(x) dx\right) / \left(\int_a^b \varphi(x) dx\right)$. Com que $\varphi(x)$ era C^∞ , $\Phi(x)$ també ho serà. $\Phi(x)$ valdrà 1 des de $-\infty$ fins al punt a , serà decreixent fins al punt b , en el qual valdrà zero, i serà nul·la des de b fins a ∞ .

La funció Ψ sobre $\mathbf{R}^n$ definida per

$$\Psi(x^1, \dots, x^n) = \Phi((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)$$

compleix les propietats desitjades. Demostrem ara el lema en general. Sigui ara K un compacte d'una varietat diferenciable i U un obert que conté K . Per

a cada $x \in K$ siguin S'_x i S_x dos entorns oberts de x continguts en un domini V d'una carta local (V, φ) , amb $S'_x \subset S_x \subset U$ i tals que $\varphi(S'_x)$ i $\varphi(S_x)$ siguin dues boles concèntriques de $\mathbf{R}^n$. Seleccionem un recobriment finit $S'_1, \dots, S'_k$ del recobriment $\cup_{x \in K} S'_x$ del compacte K . Cada S'_i estarà contingut en el corresponent S_i . Com que S_i i S'_i estan continguts en una carta local i són homeomorfs (per l'homeomorfisme φ de la carta) a boles concèntriques de $\mathbf{R}^n$, podem trobar una funció diferenciable $\Psi_i: M \rightarrow \mathbf{R}$ que valgui 1 sobre $\bar{S}'_i$ i 0 fora de S_i . La funció $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ donada per $f = 1 - (1 - \Psi_1) \dots (1 - \Psi_k)$ és diferenciable. Provem que val 1 sobre K i 0 fora de U . En efecte, si $x \in K$, x és d'algun S'_i . La Ψ_i corresponent valdrà 1 en el punt x . Per tant, $1 - \Psi_i(x) = 0$. Per tant, $f(x) = 1$. Si ara $x \notin U$, x no serà de cap S_i . Per tant, $\Psi_i(x) = 0$ per a tot i . Per tant, $f(x) = 1 - 1 = 0$. ■

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA. Pel lema de l'encongiment, prenguem un recobriment $\{V_i\}$ tal que $\bar{V}_i \subset U_i$. Tornem a aplicar el lema de l'encongiment i prenguem un recobriment $\{W_i\}$ amb $\bar{W}_i \subset V_i$. Tindrem $\bar{W}_i \subset V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i \subset \bar{U}_i$. Com que $\bar{U}_i$ és compacte, $\bar{W}_i$ també ho serà. Sigui g_i una funció diferenciable que valgui 1 sobre $\bar{W}_i$ i 0 fora de U_i (lema anterior). Sigui $g = \sum_{i \in I} g_i$. Per a cada $x \in M$, en el sumatori $\sum g_i(x)$ només hi ha un nombre finit de termes no nuls. Més encara, cada $x \in M$ té un entorn U_x tal que fora de U_x tots els g_i , llevat d'un nombre finit, s'anul·len. Com que les g_i són diferenciables, g serà diferenciable a U_x . Com que això passarà per a tot x , g serà diferenciable. A més, g no s'anul·larà en cap punt, ja que cada $x \in M$ està contingut en algun W_i i llavors $g_i(x) = 1$. Sigui $f_i = g_i/g$. Evidentment, $\sum f_i = 1$ i el teorema queda demostrat. ■

Capítol 5

Varietats de Riemann

1 Definició i exemples. Longitud de corbes

Sigui M una varietat diferenciable, i g un camp tensorial diferenciable sobre M dues vegades covariant. En cada $x \in M$, g_x serà un element de $\otimes^2 T_x(M)^*$. Recordem que al capítol 1 havíem establert un isomorfisme canònic entre $\otimes^2 E^*$ i $\mathcal{L}(E, E; \mathbf{R})$. Per tant, g_x podrà pensar-se com una aplicació bilineal

$$g_x: T_x(M) \times T_x(M) \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Direm que g és simètric quan en tot punt x es compleix $g_x(v_1, v_2) = g_x(v_2, v_1)$. Això coincideix amb la definició de tensors simètrics donada al capítol 1. Direm que g és definit positiu quan $g_x(v, v) > 0$ per a tot $v \neq 0$ i tot x .

Definició 5.1 *Una varietat de Riemann és una varietat diferenciable M dotada d'un camp tensorial diferenciable g , dues vegades covariant, simètric i definit positiu. g s'anomena mètrica de Riemann.*

Exemples. El producte escalar usual de $\mathbf{R}^m$, donat per

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \longrightarrow & \sum x^i y^i, \end{array}$$

dota $\mathbf{R}^m$ d'una estructura de varietat de Riemann.

Sigui (U, f) una subvarietat parametritzada de $\mathbf{R}^m$ (vegeu capítol 4, apartat 2). $M = f(U)$ és una varietat diferenciable (d'una sola carta local, (M, f^{-1})). Com que $T_x(M) \subset \mathbf{R}^m$, sigui g_x la restricció de la mètrica g de $\mathbf{R}^m$ a $T_x(M) \times T_x(M)$. Això dota M d'una estructura de varietat de Riemann.

Un altre exemple significatiu de mètrica de Riemann “abstracta” és el següent. Sigui $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ amb } y > 0\}$. Considerem sobre M el camp tensorial dues vegades covariant donat per

$$g = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{y^2}.$$

Amb la identificació de $\otimes^2 T_p(M)^*$ i $\mathcal{L}(T_p(M), T_p(M); \mathbf{R})$, aquest g dona lloc en cada punt $p = (x, y)$ a l'aplicació bilineal següent:

$$g_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0, \quad g_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{1}{y^2}, \quad g_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{y^2}.$$

Aquesta mètrica dota M d'una estructura de varietat de Riemann.

Definició 5.2 Si (M, g) és una varietat de Riemann i $x(t)$ és una corba diferenciable de M , es defineix la longitud de $x(t)$ entre dos punts $x(a)$ i $x(b)$ com

$$\int_a^b \sqrt{g(\dot{x}(t), \dot{x}(t))} dt.$$

2 Connexions i símbols de Christoffel

Sigui M una varietat diferenciable. Designem per $\mathcal{X}(M)$ el conjunt de camps vectorials diferenciables sobre M , i per $\mathcal{F}(M)$ el conjunt de funcions diferenciables. $\mathcal{X}(M)$ és de manera natural un $\mathcal{F}(M)$ -mòdul. Una connexió ∇ sobre M , o un operador de derivació covariant, és per definició una aplicació

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) & \longrightarrow & \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

que compleix les propietats següents:

- a) $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$.
- b) $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$.
- c) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$, on f és una funció.
- d) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$.

La proposició següent ens serà molt útil.

Proposició 5.3 Sigui ∇ una connexió sobre M , i U un obert de M .

- 1) Si els camps X i X' coincideixen sobre U , llavors $\nabla_X Y$ i $\nabla_{X'} Y$ coincideixen sobre U .
- 2) Si els camps Y i Y' coincideixen sobre U , llavors $\nabla_X Y$ i $\nabla_X Y'$ coincideixen sobre U .

DEMOSTRACIÓ. La demostració d'1) i 2) és similar. Farem només la d'1). Sigui $Z = X - X'$. Basta provar que si Z s'anul·la sobre U , llavors $\nabla_Z Y$ s'anul·la sobre U . N'hi ha prou amb veure que, fixat $p \in U$, $(\nabla_Z Y)_p$ s'anul·la. Sigui V un entorn de p contingut a U . Sigui f una funció diferenciable sobre tot M que valgui 0 en p i 1 fora de V . Llavors $Z = fZ$ sobre tota la varietat, ja que f val 1 fora de V , i dintre de V tots dos membres s'anul·len. Tindrem, doncs,

$$\nabla_Z Y = \nabla_{fZ} Y = f \nabla_Z Y.$$

Per tant, $(\nabla_Z Y)_p = f(p)(\nabla_Z Y)_p = 0$. ■

Com a corollari immediat de la proposició 5.3, (aplicant successivament 1) i 2)) tenim el teorema següent:

Teorema 5.4 (Principi de localització de connexions) *Siguin X , Y , X' i Y' camps vectorials sobre M . Si $X = X'$ sobre U i $Y = Y'$ sobre U , llavors $\nabla_X Y = \nabla_{X'} Y'$ sobre U .*

Aquest teorema té com a conseqüència que tota connexió ∇ sobre M indueix una connexió ∇_U sobre cada obert U , de la manera següent. Si X , Y són camps sobre U , siguin $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ camps sobre M que coincideixin sobre U amb X , Y respectivament. Llavors $(\nabla_U)_X Y$, que estem definint sobre U , és la restricció a U de $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}$. El principi de localització ens assegura que $(\nabla_U)_X Y$ no depèn de les extensions $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ concretes elegides.

A partir d'ara ometrem U i escriurem només ∇ per designar tant la connexió sobre tot M com la que indueix sobre cada obert U . Si $e_1 \dots e_n$ són camps vectorials diferenciables sobre un obert U que en cada punt constitueixen una base de l'espai tangent, en cada punt $\nabla_{e_i} e_j$ serà combinació lineal de $e_1 \dots e_n$. Designem per Γ_{ij}^k els coeficients d'aquesta combinació lineal:

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k \quad (5.1)$$

(aquí usem el conveni de sumació d'índexs del capítol 1).

Els Γ_{ij}^k s'anomenen símbols de Christoffel relatius a la base $e_1 \dots e_n$. El coneixement dels símbols de Christoffel equival al coneixement de la connexió

sobre U . En efecte, siguin X, Y dos camps sobre U . Posem $Y = \sum Y^j e_j$. Tindrem

$$\nabla_X Y = \nabla_X (Y^j e_j) = X(Y^j) e_j + Y^j \nabla_X e_j = X(Y^j) e_j + Y^j X^i \Gamma_{ij}^k e_k.$$

O sigui,

$$\nabla_X Y = (X(Y^k) + Y^j X^i \Gamma_{ij}^k) e_k. \quad (5.2)$$

La fórmula (5.2) ens diu que el coneixement dels símbols de Christoffel i dels camps X, Y determina $\nabla_X Y$. No obstant això, la fórmula (5.2) ens diu també una cosa que resumirem en la proposició següent.

Proposició 5.5 *Sigui ∇ una connexió i p un punt de M . Per conèixer $(\nabla_X Y)_p$ basta conèixer X_p i conèixer Y sobre una petita corba $x(t)$ de M tal que $x(0) = p$ i $\dot{x}(0) = X_p$.*

DEMOSTRACIÓ. $(\nabla_X Y)_p$ serà igual al segon membre de (5.2) avaluat en el punt p . Per conèixer $X(Y^k)$ en el punt p , com que $X(Y^k)$ són derivades direccionals en la direcció de X , bastarà conèixer les funcions Y^k sobre una petita corba $x(t)$ tal que $x(0) = p$ i $\dot{x}(0) = X_p$. Per conèixer $Y^j X^i \Gamma_{ij}^k$ en el punt p bastarà conèixer X_p, Y_p i $\Gamma_{ij}^k(p)$. ■

3 Derivades covariants de camps que només estan definits sobre corbes

Sigui $x(t)$ una petita corba de M . Anomenarem camp vectorial amb suport la corba $x(t)$ l'assignació d'un vector $Y_{x(t)} \in T_{x(t)}(M)$ a cada punt $x(t)$ de la corba. Si prenem una carta local $(U, x^1 \dots x^n)$ que contingui la corba, $Y_{x(t)}$ s'expressarà

$$Y_{x(t)} = \sum Y^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

on les components Y^i depenen de t . El camp amb suport la corba $x(t)$ es diu diferenciable si les funcions $Y^i(t)$ són funcions diferenciables de t .

Proposició 5.6 *Sigui $x(t)$ una petita corba de M , i $p = x(0)$. Sigui Y un camp diferenciable amb suport la corba $x(t)$. Existeix un camp diferenciable Y' sobre tota la varietat, i un $\varepsilon > 0$ tals que $Y_{x(t)}$ coincideix amb $Y'_{x(t)}$ per a $|t| < \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓ. És fàcil construir un sistema de coordenades $(U, x^1 \dots x^n)$ en un petit entorn de p tal que $t \rightarrow (t, 0 \dots 0)$ sigui la corba donada. $Y_{x(t)}$ s'expressarà

$$Y_{(t, 0 \dots 0)} = Y^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

és a dir,

$$Y_{(x^1, 0 \dots 0)} = Y^i(x^1) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Considerem el camp $\tilde{Y}$ sobre U definit per $Y^i(x^1) \partial / \partial x^i$. Sigui f una funció diferenciable sobre tot M que valgui 1 en un petit entorn de p i 0 fora de U . El camp $Y' = f\tilde{Y}$ estarà definit sobre tot M i complirà les condicions desitjades. ■

Definició 5.7 Si $x(t)$ és una petita corba i Y és un camp diferenciable amb suport aquesta corba, definim $\nabla_{\dot{x}(t)} Y$ en cada $p = x(t_0)$ de la corba com $(\nabla_{X'} Y')_p$, on X' i Y' són, respectivament, extensions a tota la varietat de $\dot{x}(t)$ i Y donades per la proposició anterior.

La proposició 5.5 ens assegura que $\nabla_{\dot{x}(t)} Y$ no depèn de les extensions X' , Y' concretes elegides.

4 Connexió de Riemann

Sigui (M, g) una varietat de Riemann, on M és la varietat diferenciable, i g la mètrica. Una connexió ∇ sobre M es diu que és compatible amb la mètrica g si compleix la propietat següent:

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (5.3)$$

per a camps X, Y, Z qualssevol. Observeu que $g(Y, Z)$ és la funció que a cada x li fa correspondre $g_x(Y_x, Z_x)$. $X(g(Y, Z))$ vol dir la funció que en cada x val $X_x(g(Y, Z))$.

Teorema 5.8 Si (M, g) és una varietat de Riemann, existeix una única connexió ∇ sobre M compatible amb g i que compleix

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad (5.4)$$

per a tot X, Y .

L'única connexió ∇ donada per aquest teorema s'anomena *connexió de Riemann*.

DEMOSTRACIÓ. Escrivim la propietat (5.3) de compatibilitat amb la mètrica fent una permutació cíclica de X, Y, Z :

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ Y(g(Z, X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ Z(g(X, Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

Sumem les dues primeres igualtats i restem la tercera. En el segon membre de la igualtat resultant, utilitzem el fet que g és simètric i (5.4). Tindrem

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) &= g(\nabla_X Y, Z) + \\ &+ g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, [X, Z]) + g(X, [Y, Z]). \end{aligned}$$

Sumem i restem $g(\nabla_X Y, Z)$ en el segon membre d'aquesta igualtat i utilitzem (5.4):

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) &= 2g(\nabla_X Y, Z) + \\ &+ g(Z, [Y, X]) + g(Y, [X, Z]) + g(X, [Y, Z]). \end{aligned}$$

Aquesta igualtat es pot escriure

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \Big\{ &X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - \\ &- g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X]) \Big\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Aquesta igualtat determina $\nabla_X Y$ en cada punt p de manera única (ja que es coneix el producte escalar de $(\nabla_X Y)_p$ amb qualsevol Z_p). Això demostra la unicitat de la connexió ∇ que compleix les propietats exigides pel teorema. Quant a l'existència, basta provar que el camp $\nabla_X Y$ determinat en tot punt per la fórmula (5.5) compleix totes les propietats d'una connexió i també compleix (5.3) i (5.4). Aquesta comprovació la deixem per al lector. ■

Sigui $(U, x^1 \dots x^n)$ una carta local de M . Vegem com es determinen els símbols de Christoffel relatius a la base $\partial/\partial x^1 \dots \partial/\partial x^n$, de la connexió del teorema 5.8. Sigui

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Localitzem la connexió a l'obert U i escrivim (5.5) prenent

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Observem que els claudàtors de dos d'aquests camps són nuls ja que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right](f) = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}(f) - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}(f) = 0.$$

La fórmula (5.5) s'escriurà

$$\Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{jk}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(g_{ki}) - \frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}) \right\}.$$

Si designem per (g^{ij}) la matriu inversa de (g_{ij}) , tindrem

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} g^{rk} \left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \right), \quad (5.6)$$

on hem abreuïat $\partial_i = \partial/\partial x^i$.

5 Càlcul de variacions i geodèsiques

Segui $x(t)$ una corba d'una varietat de Riemann. Segui $p = x(0)$, $q = x(1)$. Reparametritzem la corba per l'arc. Tornem a anomenar t el paràmetre arc. Tindrem $x(0) = p$, $x(a) = q$, on a és la longitud de l'arc de corba entre p i q . Una variació d'aquesta corba amb extrems fixos p i q és per definició una aplicació diferenciable α de l'obert $U = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, a + \varepsilon)$ de $\mathbf{R}^2$ a M ,

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\alpha} & M \\ (s, t) & \longmapsto & \alpha(s, t), \end{array}$$

tal que:

- 1) $\alpha(s, 0) = p$, $\alpha(s, a) = q$ per a tot s .
- 2) $\alpha(0, t) = x(t)$ per a tot $t \in [0, a]$.

En tot punt $\alpha(s_0, t_0)$ de M definim els vectors $\partial/\partial s$ i $\partial/\partial t$ de $T_{\alpha(s_0, t_0)}(M)$ com els vectors respectivament tangents a les corbes $s \rightarrow \alpha(s, t_0)$ i $t \rightarrow \alpha(s_0, t)$. Per a s_0 fix, sigui α_{s_0} la corba $t \rightarrow \alpha(s_0, t)$. La longitud de α_s entre p i q val

$$L(\alpha_s) = \int_0^a \sqrt{g(\dot{\alpha}_s, \dot{\alpha}_s)} dt = \int_0^a \sqrt{g\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\alpha(s, t)}, \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\alpha(s, t)}\right)} dt.$$

Escriurem això abreujadament:

$$L(\alpha_s) = \int_0^a \sqrt{g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)_s} dt.$$

$L(\alpha_s)$ és una funció de s que quan $s = 0$ val la longitud de la corba inicial $x(t)$ entre p i q . Direm que la corba inicial $x(t)$ és extremal de la longitud entre p i q si

$$\left(\frac{dL(\alpha_s)}{ds}\right)_{s=0} = 0$$

per a tota variació α de $x(t)$ amb extrems fixos p i q . Trobem condicions necessàries i suficients perquè això passi.

$$\frac{d}{ds}L(\alpha_s) = \int_0^a \frac{1}{2\sqrt{g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)_s}} \frac{\partial}{\partial s}g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)_s dt.$$

En fer $s = 0$, com que $\partial/\partial t$ sobre la corba inicial té norma 1, ja que la corba està parametritzada per l'arc, tindrem:

$$\left(\frac{d}{ds}L(\alpha_s)\right)_{s=0} = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\partial}{\partial s}g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)_{s=0} dt.$$

Provem que sobre $\alpha(U)$ es compleix

$$\frac{\partial}{\partial s}g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial t}\right) = 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right). \quad (5.7)$$

Malgrat que $\partial/\partial s$ i $\partial/\partial t$ no són camps sobre M , ni tan sols sobre un obert de M , fixat un punt $\alpha(s_0, t_0)$ de $\alpha(U)$, en virtut de la proposició 5.6, existeixen camps X, Y sobre M tals que sobre la corba $s \rightarrow \alpha(s, t_0)$, en un petit entorn de $\alpha(s_0, t_0)$, coincideixen amb $\partial/\partial s$ i $\partial/\partial t$. Llavors, com que

$$X(g(Y, Y)) = 2g(\nabla_X Y, Y),$$

en el punt $\alpha(s_0, t_0)$ es complirà (5.7). Tindrem:

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X - [X, Y].$$

Però

$$[X, Y]_{\alpha(s_0, t_0)}(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}\right)_{(s_0, t_0)} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\right)_{s_0, t_0} = 0.$$

Per tant,

$$\left(\frac{d}{ds}L(\alpha_s)\right)_{s=0} = \int_0^a g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right)_{s=0} dt.$$

Per una fórmula anàloga a (5.7), tenim

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Per tant,

$$\left(\frac{d}{ds}L(\alpha_s)\right)_{s=0} = \left[g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\right]_{s=0}^{t=a} - \int_0^a g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t}\right)_{s=0} dt.$$

Però el primer terme del segon membre és nul ja que $\partial/\partial s$ s'anul·la en els punts p i q corresponents a $t = 0$ i $t = a$.

Si $x(t)$ és extremal de la longitud, l'expressió anterior s'haurà d'anul·lar per a tota variació α , la qual cosa implica que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = 0$ sobre la corba $s = 0$, és a dir, sobre la corba $x(t)$ original. En efecte, en cas contrari sempre es pot fabricar una variació α en què la integral

$$\int_0^a g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t}\right)_{s=0} dt$$

sigui positiva.

Resumint, una condició necessària i suficient perquè una corba $x(t)$ *parametrizada per l'arc* sigui extremal de la longitud és que $\nabla_{\dot{x}(t)} \dot{x}(t) = 0$.

Proposició 5.9 *Si $x(t)$ és una corba que compleix $\nabla_{\dot{x}(t)} \dot{x}(t) = 0$ encara que t no sigui el paràmetre arc, quan es reparametriza per l'arc, compleix la mateixa condició.*

DEMOSTRACIÓ. Sobre una tal corba es tindrà

$$\frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 0.$$

Per tant, $g(\dot{x}, \dot{x})$ no depèn de t (és constant). Per tant, si u és el paràmetre arc, es té $t = ku$, on k és una constant, i la proposició queda demostrada. ■

Definició 5.10 *Anomenarem geodèsica tota corba $x(t)$ tal que $\nabla_{\dot{x}(t)} \dot{x}(t) = 0$.*

Tenint present la fórmula (5.2), s'obté immediatament que en una carta local $(U, x^1 \dots x^n)$ l'equació $\nabla_{\dot{x}(t)} \dot{x}(t) = 0$ s'escriu

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad (5.8)$$

on Γ_{jk}^i són els símbols de Christoffel relatius a la base $\frac{\partial}{\partial x^1} \dots \frac{\partial}{\partial x^n}$.

Com que l'equació de les geodèsiques s'escriu $\nabla_{\dot{x}} \dot{x} = 0$, molts matemàtics allunyats del món de la física o del càlcul de variacions en la seva formulació primitiva d'Euler, tenen la ferma convicció que per escriure explícitament les

equacions de les geodèsiques d'una determinada mètrica de Riemann és indispensable haver calculat abans la derivada covariant ∇ associada a la mètrica, ja sigui pels seus símbols de Christoffel o per algun altre procediment equivalent. Res més lluny de la realitat. A continuació descriurem un procediment que evita aquest càlcul i permet escriure directament les equacions de les geodèsiques a partir de l'expressió de la mètrica en una carta local. Aquí només donarem la recepta del procediment, deixant la seva justificació per a més endavant (vegeu l'apartat 5 del capítol 8, proposició 8.1). L'esmentada justificació utilitza el concepte de fibrat tangent que trobarem a l'apartat 2 del capítol 8. La recepta del procediment que donarem ara, en canvi, és senzilla i no necessita cap coneixement previ, a part dels introduïts fins ara. Si $(U, x^1, \dots, x^n)$ és una carta local d'una varietat de Riemann (M, g) , tindrem que g s'expressarà a U de la manera següent:

$$g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

amb les g_{ij} funcions de $x^1 \dots x^n$. Escrivim a continuació, formalment, la funció de les $2n$ variables $x^1 \dots x^n, \dot{x}^1 \dots \dot{x}^n$ que té l'expressió següent, i que tornem a designar per g fent un abús de llenguatge:

$$g = \sum g_{ij}(x^1 \dots x^n) \dot{x}^i \dot{x}^j.$$

Escrivim formalment les equacions

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial g}{\partial x^i}, \quad (5.9)$$

amb la convenció que $dx^i/dt = \dot{x}^i$ i que $\dot{x}^i/dt = \ddot{x}^i$. Aquestes són les equacions de les geodèsiques. Per tal d'entendre millor aquesta recepta, apliquem-la per obtenir les equacions de les geodèsiques del semiplà de Poincaré $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ amb } y > 0\}$ dotat de la mètrica $g = (dx \otimes dx + dy \otimes dy)/y^2$. La funció g de les variables $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ associada a la mètrica anterior serà $g = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/y^2$. Tindrem

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} &= \frac{2\dot{x}}{y^2}; & \frac{\partial g}{\partial \dot{y}} &= \frac{2\dot{y}}{y^2}; & \frac{\partial g}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{y^3} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} &= \frac{2\ddot{x}y^2 - 4\dot{x}\dot{y}\dot{y}}{y^4}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{y}} &= \frac{2\ddot{y}y^2 - 4y\dot{y}^2}{y^4}. \end{aligned}$$

Les equacions de les geodèsiques seran, doncs,

$$\begin{cases} \ddot{x}y - 2\dot{x}\dot{y} = 0 \\ \ddot{y}y - \dot{y}^2 + \dot{x}^2 = 0. \end{cases}$$

6 Isometries infinitesimals

Definició 5.11 Direm que un camp vectorial X sobre una varietat de Riemann (M, g) és una isometria infinitesimal si el grup uniparamètric local de transformacions $\{\varphi_t\}$ que li correspon està format per isometries. Això equival a dir que per a tot $x \in M$ i tot $v, w \in T_x(M)$ es compleix $g_x(v, w) = g_{\varphi_t(x)}(\varphi'_t(x)v, \varphi'_t(x)w)$, qualsevol que sigui t en l'interval $] -\varepsilon, \varepsilon[$ de definició de $\varphi_t(x)$, on $\varphi'_t(x)$ indica l'aplicació lineal tangent de $\varphi_t(x)$. Les isometries infinitesimals també s'anomenen, a vegades, camps de Killing.

Proposició 5.12 Sigui X un camp vectorial d'una varietat de Riemann (M, g) . Les tres afirmacions següents són equivalents:

- 1) X és una isometria infinitesimal.
- 2) En qualsevol carta local $(U, x^1 \dots x^n)$ de M en la qual X s'expressi $X = \sum X^i \partial / \partial x^i$ es compleix:

$$X(g_{ij}) = - \sum_k \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} g_{kj} + g_{ik} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right),$$

on $g_{ij} = g(\partial / \partial x^i, \partial / \partial x^j)$.

- 3) Per a qualsevol parell Y, Z de camps vectorials sobre M es compleix

$$X(g(Y, Z)) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]).$$

DEMOSTRACIÓ. Provem l'equivalència de 1) i 2). La condició d'isometria infinitesimal equival a dir que fixats $x \in M$ i $v, w \in T_x(M)$, la funció

$$f_{x,v,w}(t) = g_{\varphi_t(x)}(\varphi'_t(x)v, \varphi'_t(x)w)$$

és constant (com a funció de t). Veurem ara que aquesta condició equival al fet que per a tot $x \in M$ i tot $v, w \in T_x(M)$ es compleixi

$$\left(\frac{d}{dt} f_{x,v,w}(t) \right)_{t=0} = 0.$$

Hauríem de veure que aquesta última identitat implica $df_{x,v,w}(t)/dt = 0$ per a tot x, v, w . Com que φ_t és un grup uniparamètric, de la definició de $f_{x,v,w}(t)$ es desprèn

$$f_{x,v,w}(t+s) = f_{\varphi_t(x), \varphi'_t(x)v, \varphi'_t(x)w}(s).$$

Per tant,

$$\frac{d}{dt} f_{x,v,w}(t) = \frac{d}{ds} (f_{x,v,w}(t+s))_{s=0} = \frac{d}{ds} (f_{\varphi_t(x), \varphi'_t(x)v, \varphi'_t(x)w}(s))_{s=0} = 0.$$

Situem-nos en una carta local $(U, x^1 \dots x^n)$. Tindrem

$$f_{x,v,w}(t) = g_{ij}(\varphi_t(x))(\varphi'_t(x)v)^i(\varphi'_t(x)w)^j.$$

Tenint en compte que

$$(\varphi'_t(x)v)^i = \sum_k \frac{\partial \varphi_t(x)^i}{\partial x^k} v^k,$$

derivem $f_{x,v,w}(t)$ en el punt $t = 0$ i igulem a zero. Tindrem

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} X^k v^i w^j + g_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} v^k w^j + g_{ij} v^i \frac{\partial X^j}{\partial x^k} w^k = 0.$$

En el segon terme del primer membre d'aquesta igualtat, intercanviem entre ells els índexs de sumació k, i , de manera que k passi a anomenar-se i , i i passi a anomenar-se k . Anàlogament, en el tercer terme intercanviem els índexs k, j . Llavors la identitat anterior s'escriu

$$\left(X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj} \frac{\partial X^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) v^i w^j = 0.$$

Com que això s'ha de complir per a tot v, w , aquesta igualtat equival a la de l'enunciat de la condició 2). Això prova l'equivalència entre 1) i 2). Provem ara l'equivalència de 2) i 3). Com que

$$\left[X, \frac{\partial}{\partial x^i} \right] = - \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k},$$

la identitat de l'enunciat de 2) es pot escriure

$$X \left(g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) = g \left(\left[X, \frac{\partial}{\partial x^i} \right], \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \left[X, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \right).$$

Observem ara que si f és una funció arbitrària, es té $[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$. Per tant,

$$\begin{aligned} g([X, Y], Z) &= g \left(\left[X, Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right], Z \right) = \\ &= g \left(X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \left[X, \frac{\partial}{\partial x^i} \right], Z^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \\ &= X(Y^i) Z^j g_{ij} + Y^i Z^j g \left(\left[X, \frac{\partial}{\partial x^i} \right], \frac{\partial}{\partial x^j} \right). \end{aligned}$$

Per tant, utilitzant la identitat de l'enunciat de 2), s'obté

$$g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) = \\ X(Y^i)Z^j g_{ij} + Y^i X(Z^j)g_{ij} + Y^i Z^j X(g_{ij}) = X(g(Y, Z)).$$

Això prova la proposició. ■

Corol·lari 5.13 *Sigui (M, g) una varietat de Riemann. Si en una carta local $(U, x^1 \dots x^n)$ de M tots els coeficients g_{ij} de la mètrica no depenen d'una determinada coordenada x^h , llavors $\partial/\partial x^h$ és un camp de Killing sobre U .*

DEMOSTRACIÓ. L'equació de l'apartat 2) de la proposició anterior es compleix trivialment quan $X = \partial/\partial x^h$, ja que $X^k = \delta_{kh}$. ■

Per exemple, en el semiplà de Poincaré $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ amb } y > 0\}$ dotat de la mètrica $g = (dx \otimes dx + dy \otimes dy)/y^2$, el camp vectorial $\partial/\partial x$ és un camp de Killing.

7 Tensor de curvatura

Definim tensor de curvatura d'una varietat de Riemann (M, g) com l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) & \longrightarrow & \mathcal{X}(M) \\ (X, Y, Z) & \longmapsto & R(X, Y)Z \end{array},$$

on $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z$, on ∇ és la connexió de Riemann.

De la definició es desprèn que $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$.

Proposició 5.14 *Si f és una funció, es compleix:*

- 1) $R(fX, Y)Z = fR(X, Y)Z$.
- 2) $R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z$.
- 3) $R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$.

DEMOSTRACIÓ. Provem, per exemple, 1). És fàcil comprovar a partir de la definició de claudàtor que $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$. Tindrem, doncs,

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= \nabla_{fX} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX, Y]}Z = \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - Y(f) \nabla_X Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_{[X, Y]}Z + \\ &+ Y(f) \nabla_X Z = fR(X, Y)Z. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Sigui $(U, x^1 \dots x^n)$ una carta local. Com que en virtut del teorema 5.4 la connexió ∇ es pot localitzar a U , $R(X, Y)Z$, que està definit a través de derivades covariants, es pot localitzar a U . $R(\partial/\partial x^k, \partial/\partial x^r)\partial/\partial x^j$ serà un camp sobre U i, per tant, combinació lineal de $\partial/\partial x^1 \dots \partial/\partial x^n$. Posem

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^r}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} = R_{jkr}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (5.10)$$

on R_{jkr}^i són els coeficients d'aquesta combinació lineal. Anomenem components del tensor de curvatura en la base $\partial/\partial x^1 \dots \partial/\partial x^n$ les funcions R_{jkr}^i . Evidentment, R_{jkr}^i és antisimètric en els índexs k, r .

De la identitat

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^r}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^r}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^r}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

s'obté immediatament l'expressió

$$R_{jkr}^i = \partial_k \Gamma_{rj}^i - \partial_r \Gamma_{kj}^i + (\Gamma_{rj}^s \Gamma_{ks}^i - \Gamma_{kj}^s \Gamma_{rs}^i). \quad (5.11)$$

Si X, Y, Z són camps sobre U , es tindrà

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= R(X^k \partial_k, Y^r \partial_r)Z^j \partial_j = (\text{en virtut de la proposició 5.14}) = \\ &= X^k Y^r Z^j R(\partial_k, \partial_r)\partial_j = X^k Y^r Z^j R_{jkr}^i \partial_i. \end{aligned}$$

Aquesta expressió posa en evidència que el valor de $R(X, Y)Z$ en qualsevol punt p de U només depèn dels valors dels camps X, Y, Z en p . Per tant si $u, v, w \in T_p(M)$, té sentit posar $R(u, v)w$. Això vol dir el següent. Es prenen tres camps X, Y, Z que en el punt p valguin respectivament u, v, w i es posa $R(u, v)w = R(X, Y)Z$ en el punt p . Això no dependrà de les extensions X, Y, Z concretes de u, v, w .

El tensor de curvatura dóna doncs una aplicació multilinear

$$T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$$

en cada punt p . És a dir, un tensor tres vegades covariant i una vegada contravariant en cada p .

Això justifica l'ús de la paraula “tensor” en la definició de tensor de curvatura. L'ús de la paraula “curvatura” es justifica per la seva relació amb la curvatura de Gauss de les superfícies, donada pel resultat següent.

Teorema 5.15 *Sigui $M \subset \mathbf{R}^3$ una superfície de $\mathbf{R}^3$ de les que consideràvem al capítol 3. La mètrica euclidiana usual de $\mathbf{R}^3$ indueix una mètrica g a M que la converteix en una varietat de Riemann. Sigui $R(X, Y)Z$ el tensor de curvatura de (M, g) . Fixat $x \in M$, sigui $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal qualsevol de $T_x(M)$. Es compleix $g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) = K_x$, on K_x designa la curvatura de Gauss de la superfície M en el punt x .*

Observació. Com que el tensor de curvatura d'una varietat de Riemann s'ha definit a partir de la derivada covariant, i com que aquesta queda determinada unívocament a partir de la mètrica g , del teorema que acabem d'enunciar es desprèn que K queda determinada per la mètrica g de M . Això és justament el que afirma el Teorema Egredi.

La demostració que donarem a continuació és, doncs, una altra demostració del Teorema Egredi.

DEMOSTRACIÓ. D'acord amb el teorema 4.1, la connexió ∇ associada a una mètrica de Riemann és un operador que queda unívocament determinat per les propietats a), b), c), d) de la definició de connexió, per la propietat (5.3) de ser compatible amb la mètrica i per la propietat (5.4). Si a $\mathbf{R}^3$ designem, com sempre, per $\nabla_X Y$ la derivada direccional del camp Y en la direcció de X , com que la derivada direccional compleix totes les propietats anteriors (segons hem vist al capítol 2), és la derivada covariant associada a la mètrica euclidiana g de $\mathbf{R}^3$. Al capítol 3 consideràvem la derivada $\bar{\nabla}_X Y$ de la superfície M , on X i Y eren camps vectorials de M , obtinguda per projecció ortogonal sobre l'espai tangent de la derivada direccional $\nabla_X Y$ de $\mathbf{R}^3$. La derivada $\bar{\nabla}$ complia, també, totes les propietats esmentades anteriorment. Per tant, la derivada covariant associada a la varietat de Riemann (M, g) no és altra cosa que la derivada $\bar{\nabla}_X Y$ considerada al capítol 3. Recordem que $\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \alpha(X, Y)n$, on α és la segona forma quadràtica de M i n és un dels dos camps unitaris, normals a M (escollit una vegada per totes).

Comencem provant que el tensor de curvatura de $\mathbf{R}^3$ és nul. Per a això basta recordar que si $\{e_1, e_2, e_3\}$ és una base fixa de $\mathbf{R}^3$ i si Y, Z són camps vectorials de $\mathbf{R}^3$, l'expressió de la derivada direccional de Z respecte a Y és

$$\nabla_Y Z = \sum_{i,j} Y^i \frac{\partial Z^j}{\partial x^i} \vec{e}_j,$$

on Y^i i Z^j són les components de Y i Z en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Deixem que el lector, amb l'expressió anterior, calculi les derivades $\nabla_X \nabla_Y Z$, $\nabla_Y \nabla_X Z$ i $\nabla_{[X,Y]} Z$ i vegi que es compleix $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0$. Vegem a

continuació que si X, Y, Z i W són ara camps vectorials de M , es compleix

$$g(R(X, Y)Z, W) = \alpha(X, W)\alpha(Y, Z) - \alpha(Y, W)\alpha(X, Z), \quad (5.12)$$

on $R(X, Y)Z$ indica el tensor de curvatura de M i α la segona forma quadràtica fonamental de M . De l'expressió $\nabla_Y Z = \bar{\nabla}_Y Z + \alpha(Y, Z)n$, deduïm

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \alpha(X, \bar{\nabla}_Y Z)n + X(\alpha(Y, Z))n + \alpha(Y, Z)\nabla_X n.$$

Anàlogament,

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \text{expressió anàloga, canviant } X \text{ per } Y.$$

També tenim

$$\nabla_{[X, Y]} Z = \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z + \alpha([X, Y], Z)n.$$

Com que el tensor de curvatura de $\mathbf{R}^3$ és nul, tindrem

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W) = \\ &= g(R(X, Y)Z, W) + \alpha(Y, Z)g(\nabla_X n, W) - \alpha(X, Z)g(\nabla_Y n, W), \end{aligned}$$

que equival a l'expressió (5.12). Fixat un $x \in M$, prenguem una base $\{e_1, e_2\}$ de $T_x(M)$ en la qual e_1 i e_2 siguin direccions principals. Tindrem llavors

$$g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) = \alpha(e_1, e_1)\alpha(e_2, e_2) - \underbrace{\alpha(e_2, e_1)\alpha(e_1, e_2)}_{=0} = \rho_1 \rho_2 = K.$$

Per concloure el teorema cal provar, encara, que l'expressió $g(R(e_1, e_2)e_2, e_1)$ no depèn de la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_x(M)$ utilitzada. Si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ és una altra base ortonormal de $T_x(M)$, hauríem de veure que

$$g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) = g(R(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\varepsilon_2, \varepsilon_1).$$

De la definició de tensor de curvatura es dedueix que $R(X, Y)Z$ canvia de signe quan es permuten X i Y . De l'expressió (5.12) es dedueix que $g(R(X, Y)Z, W)$ canvia de signe quan es permuten Z i W . Sigui $e_a = \sum A_a^b \varepsilon_b$ el canvi de base. La matriu A serà ortogonal. Sigui ε el determinant de A , $\varepsilon = \pm 1$. Tindrem

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)Z &= \sum A_1^a A_2^b R(\varepsilon_a, \varepsilon_b)Z = \\ &= (A_1^1 A_2^2 - A_1^2 A_2^1)R(\varepsilon_1, \varepsilon_2)Z = \varepsilon R(\varepsilon_1, \varepsilon_2)Z. \end{aligned}$$

També tindrem

$$\begin{aligned}
 g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) &= \varepsilon g(R(\varepsilon_1, \varepsilon_2)e_2, e_1) = \\
 &= \sum A_2^a A_1^b \varepsilon g(R(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\varepsilon_a, \varepsilon_b) = \\
 &= (A_2^1 A_1^2 - A_2^2 A_1^1) \varepsilon g(R(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \\
 &= -\varepsilon^2 g(R(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \\
 &= g(R(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\varepsilon_2, \varepsilon_1) .
 \end{aligned}$$

Queda, doncs, demostrat el teorema. ■

8 Curvatures seccionals

El teorema de l'apartat anterior ens suggereix la definició següent en el cas de varietats de Riemann de dimensió n .

Definició 5.16 *Sigui (M, g) una varietat de Riemann. Sigui $x \in M$ i sigui P un subespai vectorial de dimensió 2 de $T_x(M)$ (un pla). Anomenarem curvatura seccional de M en el punt x , corresponent al pla P de $T_x(M)$, el nombre*

$$K_x(P) = g(R(u, v)v, u) ,$$

on $\{u, v\}$ és una base ortonormal qualsevol de P .

Perquè la definició sigui correcta caldria veure que si $\{u', v'\}$ és una altra base ortonormal de P , es té $g(R(u, v)v, u) = g(R(u', v')v', u')$. Ara bé, aquest càlcul és el mateix que hem fet a la demostració del teorema anterior. Allà preniem dues bases ortonormals de $T_x(M)$ perquè M tenia dimensió 2. Aquí haurem de prendre dues bases ortonormals de P , que té dimensió 2.

Observem que quan M té dimensió 2, l'únic pla P de $T_x(M)$ possible és tot l'espai $T_x(M)$ i, llavors, no cal posar $K_x(P)$ sinó simplement, K_x . Quan M és una superfície de $\mathbf{R}^3$, la curvatura seccional K_x que acabem de definir ara coincideix amb el producte de curvatures principals (curvatura de Gauss) en virtut del teorema anterior.

Per demostrar algunes propietats de la curvatura seccional de varietats de Riemann de dimensió n (quan $n > 2$), necessitem, abans, algunes propietats del tensor de curvatura, propietats que enunciem en les dues proposicions següents.

Proposició 5.17 (Primera identitat de Bianchi) *Es compleix sempre la identitat $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$, que escriurem abreujadament $\mathcal{G}R(X, Y)Z = 0$, on $\mathcal{G}$ significa “fer permutació cíclica de X, Y, Z i sumar”.*

DEMOSTRACIÓ.

$$\begin{aligned}\mathcal{G}R(X, Y)Z &= \mathcal{G}\nabla_X\nabla_Y Z - \mathcal{G}\nabla_Y\nabla_X Z - \mathcal{G}\nabla_{[X, Y]}Z = \\ &= \mathcal{G}\nabla_X\nabla_Y Z - \mathcal{G}(\nabla_Y\nabla_Z X + \nabla_Y[X, Z]) - \mathcal{G}(\nabla_Z[X, Y] + \\ &\quad + [[X, Y], Z]) = (\mathcal{G}\nabla_X\nabla_Y Z - \mathcal{G}\nabla_Y\nabla_Z X) + \\ &\quad + (\mathcal{G}\nabla_Y[Z, X] - \mathcal{G}\nabla_Z[X, Y]) + \mathcal{G}[[X, Y], Z].\end{aligned}$$

Els termes agrupats en parèntesis s’anul·len òbviament, i l’últim terme s’anul·la per la identitat de Jacobi. ■

Proposició 5.18 *El tensor de curvatura compleix la identitat següent:*

$$g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z).$$

DEMOSTRACIÓ. Tindrem

$$g(R(X, Y)Z, W) = g((\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X, Y]})Z, W). \quad (5.13)$$

Ara bé,

$$\begin{aligned}g(\nabla_X\nabla_Y Z, W) &= X(g(\nabla_Y Z, W)) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) = \\ &= XYg(Z, W) - Xg(Z, \nabla_Y W) - \\ &\quad - Yg(Z, \nabla_X W) + g(Z, \nabla_Y\nabla_X W).\end{aligned}$$

Fent el mateix amb els altres termes del segon membre de (5.13), tindrem

$$\begin{aligned}g(R(X, Y)Z, W) &= XYg(Z, W) - YXg(Z, W) - Xg(Z, \nabla_Y W) + \\ &\quad + Yg(Z, \nabla_X W) - Yg(Z, \nabla_X W) + Xg(Z, \nabla_Y W) + \\ &\quad + g(Z, \nabla_Y\nabla_X W) - g(Z, \nabla_X\nabla_Y W) - [X, Y]g(Z, W) + \\ &\quad + g(Z, \nabla_{[X, Y]}W) = -g(Z, R(X, Y)W). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Tornem ara a l’estudi de la curvatura seccional. Donem, en primer lloc, l’expressió d’aquesta curvatura en funció de bases qualssevol de $P \subset T_x(M)$, en lloc de les bases ortonormals que hem utilitzat en la seva definició.

Proposició 5.19 *Sigui $x \in M$ i sigui P un pla de $T_x(M)$. Sigui $\{u, v\}$ una base qualsevol de P , no necessàriament ortonormal. Es té*

$$K_x(P) = \frac{g(R(u, v)v, u)}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2}.$$

DEMOSTRACIÓ. Ortonormalitzem la base $\{u, v\}$, posant

$$u' = \frac{u}{\|u\|}, \quad v' = \frac{v - g(v, u')u'}{\|v - g(v, u')u'\|} = \frac{g(u, u)v - g(u, v)u}{\sqrt{g(u, u)^2g(v, v) - g(u, u)g(u, v)^2}}.$$

Un càlcul trivial (que utilitza la propietat del tensor de curvatura objecte de la proposició anterior) demostra que

$$g(R(u', v')v', u') = \frac{g(R(u, v)v, u)}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2}.$$

Queda, doncs, provada la proposició. ■

Definició 5.20 Sigui (M, g) una varietat de Riemann. Sigui $k \in \mathbf{R}$. Direm que M té curvatura seccional constant k si $K_x(P) = k$ per a tot $x \in M$ i per a tot subespai de dimensió 2, P , de $T_x(M)$.

De la proposició anterior es desprèn que si M té curvatura seccional constant k , es compleix

$$g(R(u, v)v, u) = k(g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2)$$

per a qualsevol parell de vectors u, v en qualsevol punt de M .

Donem ara una proposició de la qual aquesta identitat és un cas particular.

Proposició 5.21 Si (M, g) és una varietat de Riemann de curvatura constant k , es compleix

$$g(R(u_1, u_2)u_3, u_4) = k(g(u_1, u_4)g(u_2, u_3) - g(u_1, u_3)g(u_2, u_4))$$

per a qualsevol quaterna de vectors tangents u_1, u_2, u_3, u_4 .

Abans de demostrar aquesta proposició observem que se'n pot obtenir trivialment el corollari següent, que ens dóna explícitament el tensor de curvatura de les varietats de Riemann de curvatura constant.

Corol·lari 5.22 Si (M, g) és una varietat de Riemann de curvatura constant k , el tensor de curvatura de M és

$$R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y).$$

DEMOSTRACIÓ DE LA PROPOSICIÓ. Anomenem $R(u_1, u_2, u_3, u_4)$ i $T(u_1, u_2, u_3, u_4)$ el primer i segon membre, respectivament, de la identitat que volem demostrar. Hem vist anteriorment que $R(u, v, u, v) = T(u, v, u, v)$ per a tot parell u, v de vectors tangents. La demostració de la proposició es redueix, llavors, al lema següent, de caràcter algebraic. ■

Lema 5.23 *Sigui E un $\mathbf{R}$ -espai vectorial de dimensió n . Sigui R una aplicació quadrilineal de $E \times E \times E \times E$ en $\mathbf{R}$ amb les propietats següents:*

- 1) $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_2, v_1, v_3, v_4)$.
- 2) $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_1, v_2, v_4, v_3)$.
- 3) $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_3, v_4, v_1, v_2)$.
- 4) $R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_2, v_3, v_1, v_4) + R(v_3, v_1, v_2, v_4) = 0$ (Bianchi).

Sigui T una altra aplicació quadrilineal de $E \times E \times E \times E$ en $\mathbf{R}$ amb les mateixes propietats. Si $R(u, v, u, v) = T(u, v, u, v)$ per a qualsevol parell u, v de vectors, llavors $R = T$.

DEMOSTRACIÓ. Sigui $S = R - T$. Llavors S té, també, les propietats 1), 2), 3) i 4). S compleix que $S(u, v, u, v) = 0$ per a tot parell u, v . Volem veure, llavors, que $S = 0$. Utilitzant totes aquestes propietats, tenim

$$0 = S(u + v, w, u + v, w) = S(u, w, v, w) + S(v, w, u, w) = 2S(u, w, v, w).$$

Utilitzant ara aquest fet, tenim

$$\begin{aligned} 0 &= S(u_1, u_2 + u_4, u_3, u_2 + u_4) = \underbrace{S(u_1, u_2, u_3, u_2)}_{=0} \\ &\quad + S(u_1, u_2, u_3, u_4) + S(u_1, u_4, u_3, u_2) + \underbrace{S(u_1, u_4, u_3, u_4)}_{=0}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$S(u_1, u_2, u_3, u_4) = -S(u_1, u_4, u_3, u_2) = S(u_1, u_4, u_2, u_3) = S(u_2, u_3, u_1, u_4).$$

Aquesta igualtat també s'escriu de la manera següent, canviant els noms dels vectors:

$$S(u_3, u_1, u_2, u_4) = S(u_1, u_2, u_3, u_4).$$

Sumem ara tres vegades $S(u_1, u_2, u_3, u_4)$ i apliquem les dues últimes igualtats al segon i tercer terme:

$$3S(u_1, u_2, u_3, u_4) = S(u_1, u_2, u_3, u_4) + S(u_2, u_3, u_1, u_4) + S(u_3, u_1, u_2, u_4).$$

Ara bé, la propietat 4) ens diu que aquesta suma cíclica s'anul·la, i, per tant, s'anul·la també $S(u_1, u_2, u_3, u_4)$. ■

9 Càlcul de la derivada covariant i del tensor de curvatura pel mètode de la referència mòbil

Fins ara, per calcular el tensor de curvatura d'una varietat de Riemann, només coneixem el mètode que consisteix a calcular els símbols de Christoffel per l'expressió (5.6) i, després, les components del tensor de curvatura per (5.11). Ara bé, aquest càlcul resulta molt laboriós, ja que, per exemple, en una varietat de dimensió n hi ha $n^2(n-1)/2$ símbols de Christoffel. Ara donarem el mètode de la referència mòbil que gairebé sempre resulta molt més còmode.

Sigui (M, g) una varietat de Riemann i sigui U un obert de M . Una referència mòbil a U consisteix, per definició, en n camps vectorials $e_1 \dots e_n$ sobre U amb la propietat de ser una base de $T_x(M)$ per a cada $x \in U$. Donat un camp vectorial X sobre U , com que $\nabla_X e_i$ ha de ser combinació lineal de $e_1 \dots e_n$ en cada $x \in U$, posem

$$\nabla_X e_i = \sum_j \omega_i^j(X) e_j. \quad (5.14)$$

Hem designat per $\omega_i^j(X)$ els coeficients de la combinació lineal anterior per indicar que depenen de X . De les propietats de la derivada covariant es desprèn que

$$\begin{cases} \omega_i^j(X+Y) = \omega_i^j(X) + \omega_i^j(Y) \\ \omega_i^j(fX) = f\omega_i^j(X) \text{ quan } f \text{ és una funció.} \end{cases} \quad (5.15)$$

En efecte,

$$\begin{aligned} \sum \left(\omega_i^j(X) + \omega_i^j(Y) \right) e_j &= \nabla_X e_i + \nabla_Y e_i = \nabla_{X+Y} e_i = \sum \omega_i^j(X+Y) e_j \\ \sum \omega_i^j(fX) e_j &= \nabla_{fX} e_i = f \nabla_X e_i = \sum f \omega_i^j(X) e_j. \end{aligned}$$

Les identitats (5.15) proven que cada ω_i^j dóna en cada punt $x \in U$ una aplicació lineal de $T_x(M)$ en $\mathbf{R}$, o sigui, un element de $T_x(M)^*$. Per tant, cada ω_i^j és

una 1-forma diferencial. La identitat (5.14) és justament la que defineix les 1-formes ω_i^j . El coneixement de les 1-formes ω_i^j comporta el coneixement de la derivada covariant $\nabla_X Y$ a través de (5.14) i de les propietats de la derivada covariant. Anomenem $\{\theta^1 \dots \theta^n\}$ la base dual de $\{e_1 \dots e_n\}$. Les $\theta^1 \dots \theta^n$ també són 1-formes diferencials. Per relacionar les θ^i amb les ω_i^j necessitem, abans, el resultat següent.

Lema 5.24 *Si α és una 1-forma diferencial sobre una varietat diferenciable M , la diferencial exterior de α , $d\alpha$, és la 2-forma que sobre cada parell de camps vectorials (X, Y) actua de la manera següent:*

$$(d\alpha)(X, Y) = \frac{1}{2} \{X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])\}.$$

Aclariment. Una 2-forma β consisteix a assignar a cada $x \in M$ un $\beta_x \in \wedge^2 T_x(M)^* \subset \otimes^2 T_x(M)^*$. Per les identificacions algebraiques que hem fet al capítol 1, $\otimes^2 T_x(M)^* \cong \mathcal{L}(T_x(M), T_x(M); \mathbf{R})$. Per tant, β_x actua sobre els parells (v, w) d'elements de $T_x(M)$. Quan posem $(d\alpha)(X, Y)$ en l'enunciat del lema, ens referim a aquesta actuació de $d\alpha$ sobre el parell X, Y .

DEMOSTRACIÓ. Situem-nos en una carta local $(U, x^1 \dots x^n)$ de M . Tindrem $\alpha = \sum \alpha_i dx^i$.

$$d\alpha = \sum_{i,j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} (dx^j \otimes dx^i - dx^i \otimes dx^j).$$

Si indiquem per ∂_i l'operador $\partial/\partial x^i$, tindrem

$$(d\alpha)(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\partial_j \alpha_i)(X^j Y^i - X^i Y^j).$$

D'altra banda, ometent els sumatoris,

$$X(\alpha(Y)) = X^j \partial_j (\alpha_i Y^i) = X^j (\partial_j \alpha_i) Y^i + X^j \alpha_i \partial_j Y^i.$$

Queda clar, doncs, que

$$X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) = \alpha([X, Y]) + 2(d\alpha)(X, Y).$$

Això prova el lema. ■

Tornem ara a la referència mòbil $e_1 \dots e_n$ en un obert U d'una varietat de Riemann. La proposició següent ens dóna la relació que hi ha entre les θ^i i les ω_i^j .

Proposició 5.25 *Es compleix sempre la identitat*

$$d\theta^j = \sum_i \theta^i \wedge \omega_i^j.$$

DEMOSTRACIÓ. Siguin X, Y dos camps vectorials sobre U . Si X^i indiquen les components de X en la base $e_1 \dots e_n$, tenim $\theta^i(X) = X^i$ ja que $\theta^i(X) = \theta^i(\sum X^j e_j) = \sum X^j \delta_{ji} = X^i$. Tenim

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X (\sum Y^i e_i) = \sum X(Y^i) e_i + \sum Y^i \nabla_X e_i = \\ &= \sum_j \left\{ X(Y^j) + \sum_i Y^i \omega_i^j(X) \right\} e_j. \end{aligned} \quad (5.16)$$

D'aquí deduïm

$$\theta^j(\nabla_X Y) = X(\theta^j(Y)) + \sum_i \theta^i(Y) \omega_i^j(X).$$

Aplicant θ^j a la identitat $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, tenim

$$X(\theta^j(Y)) - Y(\theta^j(X)) + \sum_i (\theta^i(Y) \omega_i^j(X) - \theta^i(X) \omega_i^j(Y)) = \theta^j([X, Y]).$$

Utilitzant ara el lema, això s'escriu

$$2(d\theta^j - \sum_i \theta^i \wedge \omega_i^j)(X, Y) = 0,$$

que és el que volíem demostrar. ■

Proposició 5.26 *Si per g_{ij} designem $g(e_i, e_j)$, es compleix*

$$dg_{ij} = \sum_k (\omega_i^k g_{kj} + g_{ik} \omega_j^k).$$

Com a conseqüència, si la referència mòbil $\{e_1 \dots e_n\}$ és ortonormal, la matriu (ω_i^j) és antisimètrica.

DEMOSTRACIÓ. Utilitzant la compatibilitat de la derivada covariant amb la mètrica, tenim, per a qualsevol camp vectorial X ,

$$X(g(e_i, e_j)) = g(\nabla_X e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_X e_j).$$

Aquesta igualtat es pot escriure

$$X(g_{ij}) = \sum_k (\omega_i^k(X) g_{kj} + g_{ik} \omega_j^k(X)).$$

Com que $(dg_{ij})(X) = X(g_{ij})$, la proposició queda demostrada. ■

Les dues últimes proposicions ens permeten calcular la derivada covariant $\nabla_X Y$ a partir de la mètrica. Vegem-ho en un exemple. Considerem el semiplà de Poincaré $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ amb } y > 0\}$ dotat de la mètrica $g = (dx \otimes dx + dy \otimes dy)/y^2$. Els camps $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$ són perpendiculars, però no unitaris, ja que $g(\partial/\partial x, \partial/\partial x) = g(\partial/\partial y, \partial/\partial y) = 1/y^2$. Posem $e_1 = y\partial/\partial x$, $e_2 = y\partial/\partial y$. Llavors $\{e_1, e_2\}$ és una base ortonormal. La matriu (ω_i^j) serà antisimètrica i, com que estem en dimensió 2, bastarà calcular ω_1^2 . Sigui $\{\theta^1, \theta^2\}$ la base de $\{e_1, e_2\}$. Tindrem $\theta^1 = (1/y)dx$, $\theta^2 = (1/y)dy$. La identitat $d\theta^j = \sum \theta^i \wedge \omega_i^j$ s'escriurà

$$\begin{cases} d\theta^1 = \theta^2 \wedge \omega_2^1 = -\theta^2 \wedge \omega_1^2 \\ d\theta^2 = \theta^1 \wedge \omega_1^2. \end{cases}$$

La ω_1^2 que busquem serà combinació lineal de θ^1 i θ^2 , $\omega_1^2 = \lambda\theta^1 + \mu\theta^2$. Les identitats anteriors ens diuen que $d\theta^1 = -\lambda\theta^2 \wedge \theta^1 = \lambda\theta^1 \wedge \theta^2$ i que $d\theta^2 = \mu\theta^1 \wedge \theta^2$. Com que $d\theta^1 = -(1/y^2)dy \wedge dx = -\theta^2 \wedge \theta^1$, resulta $\lambda = 1$. Com que $d\theta^2 = 0$, resulta $\mu = 0$. Per tant, $\omega_1^2 = \theta^1 = (1/y)dx$. El coneixement de ω_1^2 determina el coneixement de la derivada covariant $\nabla_X Y$ per la fórmula (5.16).

Definim ara les formes de curvatura. Fixats dos camps vectorials X, Y sobre l'obert U en què tenim la referència mòbil $\{e_1 \dots e_n\}$, $R(X, Y)e_i$ serà combinació lineal dels elements de la base,

$$R(X, Y)e_i = 2 \sum_j \Omega_i^j(X, Y)e_j. \quad (5.17)$$

Designem els coeficients d'aquesta combinació lineal per $2\Omega_i^j(X, Y)$, per indicar que depenen de X, Y . El factor 2 el posem per comoditat en l'ús de fórmules posteriors. Com que $R(X, Y)Z$ en cada punt $x \in M$ és un tensor, els coeficients $\Omega_i^j(X, Y)$ de (5.17) dependran bilinealment de X i Y . A més, la propietat $R(X, Y)e_i = -R(Y, X)e_i$ del tensor de curvatura implica que $\Omega_i^j(X, Y) = -\Omega_i^j(Y, X)$. Això fa que puguem interpretar cada Ω_i^j com una 2-forma diferencial. La identitat (5.17) defineix la matriu (Ω_i^j) de 2-formes diferencials. Aquestes 2-formes diferencials s'anomenen formes de curvatura. El coneixement de la matriu (Ω_i^j) comporta, per (5.17), el coneixement del tensor de curvatura.

Proposició 5.27 *Es compleix la identitat*

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j,$$

que permet calcular la matriu (Ω_i^j) en funció de (ω_i^j) .

DEMOSTRACIÓ. Tenim

$$\begin{aligned}
 R(X, Y)e_i &= \nabla_X \nabla_Y e_i - \nabla_Y \nabla_X e_i - \nabla_{[X, Y]} e_i = \\
 &= \nabla_X (\omega_i^j(Y) e_j) - \nabla_Y (\omega_i^j(X) e_j) - \omega_i^j([X, Y]) e_j = \\
 &= \left(X(\omega_i^j(Y)) - Y(\omega_i^j(X)) - \omega_i^j([X, Y]) \right) e_j + \\
 &\quad + \left(\omega_i^k(Y) \omega_k^j(X) - \omega_i^k(X) \omega_k^j(Y) \right) e_j.
 \end{aligned}$$

Utilitzant el lema 5.24, tenim

$$R(X, Y)e_i = \left(2(d\omega_i^j)(X, Y) - 2(\omega_i^k \wedge \omega_k^j)(X, Y) \right) e_j.$$

D'aquesta igualtat i de (5.17) s'obté la proposició. ■

Calculem, per exemple, la curvatura seccional (curvatura de Gauss) del semiplà de Poincaré utilitzant aquesta proposició. D'aquesta proposició es dedueix que si la (ω_i^j) és antisimètrica la matriu (Ω_i^j) també ho serà. En el nostre cas, doncs, com que utilitzem una referència mòbil ortonormal, bastarà calcular Ω_1^2 . La proposició ens diu que

$$\Omega_1^2 = d\omega_1^2 - \sum_k \underbrace{\omega_1^k \wedge \omega_k^2}_{=0} = d\theta^1 = (1/y^2) dx \wedge dy = \theta^1 \wedge \theta^2.$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
 K &= g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) = 2\Omega_2^1(e_1, e_2) = -2(\theta^1 \wedge \theta^2)(e_1, e_2) = \\
 &= -2\frac{1}{2} (\theta^1(e_1)\theta^2(e_2) - \theta^1(e_2)\theta^2(e_1)) = -1.
 \end{aligned}$$

10 Extensió d'una derivació a totes les capes tensorials

En una varietat de Riemann (M, g) , sigui X un camp vectorial. Si Y és un altre camp vectorial, sabem què vol dir $\nabla_X Y$. Però si T és un camp tensorial r vegades contravariant i s vegades covariant, no sabem què significa $\nabla_X T$. Volem donar un sentit a això.

Sigui $\mathcal{I}_s^r(M)$ l'espai de camps tensorials diferenciables sobre M , r vegades contravariants i s vegades covariants. Sigui $\mathcal{I}(M)$ la suma directa de tots els $\mathcal{I}_s^r$ per a $r, s = 0, 1, 2, \dots$ (convenció: $\mathcal{I}_0^0(M) = \mathcal{F}(M)$). Una derivació D de $\mathcal{I}(M)$ serà, per definició, una aplicació

$$D: \mathcal{I}(M) \longrightarrow \mathcal{I}(M)$$

que és **R**-lineal i compleix les propietats següents:

- 1) D aplica $\mathcal{I}_s^r(M)$ en $\mathcal{I}_s^r(M)$ (direm que conserva el tipus dels tensors).
- 2) $D(A \otimes B) = DA \otimes B + A \otimes DB$.
- 3) D commuta amb qualsevol contracció tensorial. És a dir, si C és una contracció i K un camp tensorial, $D(CK) = C(DK)$.

Un raonament anàleg al de la proposició 5.3 prova que si D és una derivació i K i K' són elements de $\mathcal{I}_s^r(M)$ que coincideixen en un obert U , llavors DK i DK' coincideixen sobre U . Això implica que qualsevol derivació D de $\mathcal{I}(M)$ induïx de manera canònica una derivació D_U de $\mathcal{I}(U)$ (es pot localitzar).

Proposició 5.28 *Sigui D una aplicació $\mathcal{F}(M)$ -lineal,*

$$\mathcal{F}(M) \oplus \mathcal{X}(M) \xrightarrow{D} \mathcal{F}(M) \oplus \mathcal{X}(M),$$

que compleix:

- a) $D(\mathcal{F}(M)) \subset \mathcal{F}(M)$, $D(\mathcal{X}(M)) \subset \mathcal{X}(M)$.
- b) $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ si $f, g \in \mathcal{F}(M)$.
- c) $D(fX) = D(f)X + fD(X)$ si $f \in \mathcal{F}(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$.

Llavors existeix una única derivació de $\mathcal{I}(M)$, que continuarem designant per D , que restringida a $\mathcal{F}(M) \oplus \mathcal{X}(M)$ coincideix amb D .

DEMOSTRACIÓ. Provem en primer lloc la unicitat. Suposem que existeix D i provem que és única. Si $\omega \in \mathcal{I}_1^0(M)$, és a dir, una 1-forma, per a tot camp vectorial X tindrem

$$(D\omega)(X) = C(D\omega \otimes X) = C(D(\omega \otimes X) - \omega \otimes DX) = D(\omega(X)) - \omega(DX).$$

Com que D ja estava definida sobre les funcions i els camps vectorials, l'expressió anterior ens diu que hi ha una única manera d'estendre D a $\mathcal{I}_1^0(M)$.

Segui K un element de $\mathcal{I}_s^r(M)$ i $(U, x^1 \dots x^n)$ una carta local. Tindrem

$$K = K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}.$$

Com que D es pot localitzar a U , tindrem

$$\begin{aligned} DK &= D(K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} + \\ &+ K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} D\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right) \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} + \quad (5.18) \\ &+ \dots + K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes D(dx^{j_s}). \end{aligned}$$

Com que D està unívocament determinat sobre les funcions, sobre $\mathcal{X}(M)$ i sobre $\mathcal{I}_1^0(M)$, DK queda determinat de manera única per (5.18) sobre cada carta local. Això prova la unicitat de D .

Per provar l'existència de D , si $(U, x^1 \dots x^n)$ és una carta local, anomenem D_U l'operador sobre U donat per la fórmula (5.18). Ens cal veure que tots aquests D_U sobre cada U defineixen un D sobre tota la varietat. Si $(V, y^1 \dots y^n)$ és una altra carta local, haurem de veure que D_U i D_V coincideixen sobre $U \cap V$. Ara bé, tant D_U com D_V localitzats a $U \cap V$ donen lloc a derivacions de $\mathcal{I}(U \cap V)$ que sobre els camps vectorials i sobre les funcions coincideixen amb el D que ja teníem. Per la unicitat, D_U i D_V hauran de coincidir a $U \cap V$. ■

Donat un camp vectorial X , definim un D sobre les funcions per $D(f) = X(f)$ i un D sobre els camps vectorials per $D(Y) = \nabla_X Y$. Si K és ara un element de $\mathcal{I}_s^r(M)$, en virtut de la proposició 5.28, sabem què vol dir DK . Anomenem $\nabla_X K$ l'element DK . D'aquesta manera, sabem què vol dir la derivada covariant de qualsevol tensor.

Vegem ara com s'expressen les derivades covariants $\nabla_X(dx^i)$ quan estem en una carta local $(U, x^1 \dots x^n)$. $\nabla_X(dx^i)$ serà combinació lineal de $dx^1 \dots dx^n$, és a dir,

$$\nabla_X dx^i = \lambda_j dx^j.$$

Però

$$\begin{aligned} \lambda_j &= (\nabla_X dx^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X \left(\underbrace{dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)}_{=0} \right) - dx^i \left(\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \\ &= -dx^i \left(X^k \Gamma_{kj}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) = -X^k \Gamma_{kj}^i. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\nabla_X dx^i = -X^k \Gamma_{kj}^i dx^j. \quad (5.19)$$

Aquesta fórmula posa en evidència que el valor de $\nabla_X dx^i$ en un punt p de U només depèn del valor de X en p . És a dir, si X i X' coincideixen en p , $\nabla_X dx^i$ i $\nabla_{X'} dx^i$ coincideixen en p . D'aquí es dedueix la proposició següent:

Proposició 5.29 *Si K és un camp tensorial i X un camp vectorial, per conèixer $\nabla_X K$ en un punt p basta conèixer X en p i conèixer K sobre una petita corba $x(t)$ tal que $x(0) = p$ i $\dot{x}(0) = X_p$.*

DEMOSTRACIÓ. Per calcular $\nabla_X K$ s'ha d'aplicar la fórmula (5.19) amb $D = \nabla_X$ i amb la convenció que $D(K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r})$ vol dir $X(K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r})$. Llavors, per calcular $\nabla_X K$, basta conèixer $X(K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r})$ en el punt p , $\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^i}$ en p i $\nabla_X dx^i$ en p . Tot això ho coneixem quan coneixem X_p i K sobre una petita corba $x(t)$ que compleixi les hipòtesis de la proposició. ■

11 Diferencial covariant d'un camp tensorial. Expressió en coordenades

Sigui $K \in \mathcal{I}_s^r(M)$. Si $v \in T_x(M)$, $\nabla_v K$ té sentit en virtut de la proposició 5.29. Posarem, per abreviar, $E_x = \otimes^r T_x(M) \otimes (\otimes^s T_x(M)^*)$. L'aplicació

$$\begin{array}{ccc} T_x(M) & \longrightarrow & E_x \\ v & \longmapsto & \nabla_v K \end{array}$$

és lineal. Amb la identificació de $\mathcal{L}(T_x(M), E_x)$ i $E_x \otimes T_x(M)^*$, l'aplicació lineal anterior serà un element de $\otimes^r T_x(M) \otimes (\otimes^{s+1} T_x(M)^*)$, que anomenarem $(\nabla K)(x)$. El camp tensorial que associa $(\nabla K)(x)$ a cada $x \in M$ serà designat per ∇K , diferencial covariant de K . Per definició, ∇K serà de $\mathcal{I}_{s+1}^r(M)$.

L'expressió de ∇K en una carta local $(U, x^1 \dots x^n)$ se sol escriure amb aquesta notació:

$$\nabla K = \nabla_i K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes dx^i.$$

Així doncs, $\nabla_i K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ no són altra cosa que les components de ∇K . A la literatura és corrent designar també per $K_{j_1 \dots j_s; i}^{i_1 \dots i_r}$ les components $\nabla_i K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$. Tal com es fa la identificació de $E_x \otimes T_x(M)^*$ amb $\mathcal{L}(T_x(M), E_x)$, les components

$\nabla_i K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ de ∇K seran la matriu de l'aplicació $v \longrightarrow \nabla_v K$ de $T_x(M)$ a E_x en les bases $\{\partial/\partial x^i\}$ de $T_x(M)$ i $\{\partial/\partial x^{i_1} \otimes \dots \otimes \partial/\partial x^{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}\}$ de E_x .

Per tal de calcular aquesta matriu, suposem, per simplificar, que $K \in \mathcal{I}_0^r(M)$. Designem per ∂_i la derivació $\partial/\partial x^i$. Tindrem

$$K = K^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r}.$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} K &= \partial_i K^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} + K^{i_1 \dots i_r} \nabla_{\partial_i} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} + \dots + \\ &+ K^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \nabla_{\partial_i} \partial_{i_r} = \\ &(\partial_i K^{i_1 \dots i_r} + \Gamma_{ij}^{i_1} K^{j i_2 \dots i_r} + \dots + \Gamma_{ij}^{i_r} K^{i_1 \dots i_{r-1} j}) \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r}. \end{aligned}$$

Això dóna:

$$\nabla_i K^{i_1 \dots i_r} = \partial_i K^{i_1 \dots i_r} + \Gamma_{ij}^{i_1} K^{j i_2 \dots i_r} + \dots + \Gamma_{ij}^{i_r} K^{i_1 \dots i_{r-1} j}. \quad (5.20)$$

12 Divergència d'un camp tensorial

Segui $K \in \mathcal{I}_s^r(M)$ i suposem $r > 0$. Es defineix la divergència de K per

$$\operatorname{div} K = C_{s+1}^1(\nabla K),$$

on C_{s+1}^1 indica la contracció tensorial definida al capítol 1. Observeu que $(\nabla K)_x$ és un element de

$$T_x(M) \otimes \dots \otimes^{(r)} T_x(M) \otimes T_x(M)^* \otimes \dots \otimes^{(s+1)} T_x(M)^*.$$

C_{s+1}^1 indica que el primer $T_x(M)$ es contreu amb l'últim $T_x(M)^*$. Tindrem, doncs, $\operatorname{div} K \in \mathcal{I}_s^{r-1}(M)$.

Les components de $\operatorname{div} K$ en una carta local seran

$$(\operatorname{div} K)_{j_1 \dots j_s}^{i_2 \dots i_r} = \nabla_i K_{j_1 \dots j_s}^{i i_2 \dots i_r}.$$

Observeu que, com a cas particular, la divergència d'un camp vectorial X és la funció donada per $\nabla_i X^i$. A $\mathbf{R}^n$ amb la mètrica euclidiana és $\sum_i \partial X^i / \partial x^i$ ja que $\nabla_i = \partial_i$.

Definim ara la divergència d'un $K \in \mathcal{I}_s^0(M)$ en el cas $s \neq 0$. En cada punt x , la mètrica de Riemann dóna un isomorfisme canònic $b: T_x(M) \longrightarrow T_x(M)^*$ definit per $b(X)(Y) = g(X, Y)$. Es tindrà

$$b\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = g_{ij} dx^j, \quad \text{on } g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

L'isomorfisme invers, que anomenem $\sharp$, funciona així:

$$\sharp(dx^i) = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j},$$

on (g^{ij}) és la matriu inversa de (g_{ij}) . L'isomorfisme $\sharp$ dóna lloc al següent isomorfisme, que continuarem designant per $\sharp$:

$$\begin{array}{ccc} T_x(M)^* \otimes \dots \otimes T_x(M)^* & \longrightarrow & T_x(M) \otimes T_x(M)^* \dots \otimes T_x(M)^* \\ \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s & \longmapsto & \sharp(\omega^1) \otimes \omega^2 \otimes \dots \otimes \omega^s \end{array}.$$

Aquest isomorfisme algebraic, en cada punt, dóna lloc a un isomorfisme de camps

$$\mathcal{I}_s^0(M) \xrightarrow{\sharp} \mathcal{I}_{s-1}^1(M).$$

Si $K \in \mathcal{I}_s^0(M)$ amb $s \neq 0$, definim

$$\operatorname{div} K = \operatorname{div}(\sharp K).$$

Com que $\sharp K \in \mathcal{I}_{s-1}^1(M)$, $\operatorname{div}(\sharp K)$ ja està definit.

13 Segona identitat de Bianchi i teorema de Schur

El tensor de curvatura R és una vegada contravariant i tres vegades covariant, és a dir, $R \in \mathcal{I}_3^1(M)$. Donat un camp vectorial X , $\nabla_X R$ serà de $\mathcal{I}_3^1(M)$ i en cada punt x donarà una aplicació

$$T_x(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \longrightarrow T_x(M).$$

Proposició 5.30 *Es compleix*

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y, Z, V) &= \nabla_X(R(Y, Z)V) - R(\nabla_X Y, Z)V - R(Y, \nabla_X Z)V - \\ &\quad - R(Y, Z)\nabla_X V. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ. Remuntant-nos a la identificació de $T_x(M) \otimes T_x(M)^* \otimes T_x(M)^* \otimes T_x(M)^*$ amb $\mathcal{L}(T_x(M), T_x(M), T_x(M); T_x(M))$, tenim que $R(Y, Z)V = C_1^1 C_2^2 C_3^3(Y \otimes Z \otimes V \otimes R)$. Per tant, $\nabla_X(R(Y, Z)V) = C_1^1 C_2^2 C_3^3(\nabla_X Y \otimes Z \otimes V \otimes R) + C_1^1 C_2^2 C_3^3(Y \otimes \nabla_X Z \otimes V \otimes R) + C_1^1 C_2^2 C_3^3(Y \otimes Z \otimes \nabla_X V \otimes R) + C_1^1 C_2^2 C_3^3(Y \otimes Z \otimes V \otimes \nabla_X R)$, d'on surt la fórmula que volem demostrar. ■

Proposició 5.31 (Segona identitat de Bianchi) *El tensor de curvatura compleix les identitats següents:*

$$(\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, V) = 0.$$

Aquesta identitat l'escriurem abreviadament $\mathcal{G}_{X,Y,Z}(\nabla_X R)(Y, Z, V) = 0$.

DEMOSTRACIÓ.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{X,Y,Z}\{(\nabla_X R)(Y, Z, V)\} &= \mathcal{G}_{X,Y,Z}\{\nabla_X(R(Y, Z)V) - R(\nabla_X Y, Z)V - \\ &\quad - R(Y, \nabla_X Z)V - R(Y, Z)\nabla_X V\} = \mathcal{G}_{X,Y,Z}\{\nabla_X(R(Y, Z)V) - \\ &\quad - R(\nabla_X Y, Z)V - R(Y, \nabla_X Z)V - R(Y, [X, Z])V - \\ &\quad - R(Y, Z)\nabla_X V\} = \mathcal{G}\nabla_X(R(Y, Z)V) - \mathcal{G}R(\nabla_X Y, Z)V + \\ &\quad + \mathcal{G}R(\nabla_X Z, Y)V - \mathcal{G}R(Y, [X, Z])V - \mathcal{G}R(Y, Z)\nabla_X V. \end{aligned}$$

Ara bé, com que $R(Y, Z)V = \nabla_Y \nabla_Z V - \nabla_Z \nabla_Y V - \nabla_{[Y, Z]}V$, podem considerar $R(Y, Z)$ com l'operador $[\nabla_Y, \nabla_Z] - \nabla_{[Y, Z]}$. Llavors

$$\begin{aligned} \nabla_X(R(Y, Z)V) - R(Y, Z)\nabla_X V &= [\nabla_X, R(Y, Z)]V = \\ &= [\nabla_X, [\nabla_Y, \nabla_Z]]V - [\nabla_X, \nabla_{[Y, Z]}]V. \end{aligned}$$

D'altra banda

$$R(Y, [X, Z]) = [\nabla_Y, \nabla_{[X, Z]}] - \nabla_{[Y, [X, Z]]}.$$

Substituint a dalt i tenint present Jacobi, veiem que s'anul·la tot. ■

Utilitzant la segona identitat de Bianchi, demostrarem a continuació un resultat degut a F. Schur (1886).

Teorema 5.32 (Teorema de Schur) *Sigui (M, g) una varietat de Riemann conexa, de dimensió $n \geq 3$. Si en cada punt $x \in M$ la curvatura seccional $K_x(P)$ no depèn del particular pla $P \subset T_x(M)$, llavors $K_x(P)$ tampoc no depèn de x i és una constant $k = K_x(P)$ per a tot $x \in M$ i tot $P \subset T_x(M)$.*

Observació. La hipòtesi $n \geq 3$ és necessària ja que quan $n = 2$ el resultat és òbviament fals. (Per a $n = 2$ el teorema diria que tota varietat de Riemann de dimensió 2 té curvatura constant.)

DEMOSTRACIÓ. Hem vist al corollari 5.22 que si M té curvatura constant k , llavors es compleix

$$R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) .$$

La demostració que hem fet allà es basava en un lema de caràcter algebraic. Aquí M no té curvatura constant, però si en cada $x \in M$ designem per $k(x)$ el valor comú de tots els $K_x(P)$ per a tots els plans P de $T_x(M)$, la demostració de la proposició 5.21 (de caràcter algebraic) es pot aplicar a cada punt x , i ens dóna

$$R(X_x, Y_x)Z_x = k(x)(g(Y_x, Z_x)X_x - g(X_x, Z_x)Y_x) .$$

Demostrar el teorema de Schur equival a provar que la funció $k(x)$ és constant. Per tal d'aplicar la segona identitat de Bianchi, escriurem (tal com hem fet al principi d'aquest apartat) $R(X, Y, Z)$ en lloc de $R(X, Y)Z$. La segona identitat de Bianchi diu $\mathcal{G}_{U, X, Y}(\nabla_U R)(X, Y, Z) = 0$. Escrivim $S(X, Y, Z)$ en lloc de $g(X, Y)Z$. Amb aquesta notació, tindrem

$$R(X, Y, Z) = k(x)(S(Y, Z, X) - S(X, Z, Y)) .$$

Per tant,

$$\begin{aligned} (\nabla_U R)(X, Y, Z) &= U(k)(S(Y, Z, X) - S(X, Z, Y)) + \\ &+ k(x)((\nabla_U S)(Y, Z, X) - (\nabla_U S)(X, Z, Y)) . \end{aligned}$$

Ara bé, $\nabla_U S = 0$. En efecte,

$$\begin{aligned} (\nabla_U S)(Y, Z, X) &= \nabla_U(S(Y, Z, X)) - S(\nabla_U Y, Z, X) - S(Y, \nabla_U Z, X) - \\ &- S(Y, Z, \nabla_U X) = U(g(Y, Z))X + g(Y, Z)\nabla_U X - g(\nabla_U Y, Z)X - \\ &- g(Y, \nabla_U Z)X - g(Y, Z)\nabla_U X = 0 . \end{aligned}$$

Per tant,

$$(\nabla_U R)(X, Y, Z) = U(k)(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) .$$

Aplicant la segona identitat de Bianchi, tindrem

$$\begin{aligned} U(k)(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) &+ X(k)(g(U, Z)Y - g(Y, Z)U) + \\ &+ Y(k)(g(X, Z)U - g(U, Z)X) = 0 . \end{aligned}$$

En cada $x \in M$ prenguem X_x de manera arbitrària i, Y_x, Z_x de manera que $\{X_x, Y_x, Z_x\}$ siguin perpendiculars entre ells i que $g_x(Z_x, Z_x) = 1$ (aquí estem utilitzant la hipòtesi $\dim T_x(M) \geq 3$). Prenguem llavors $U_x = Z_x$. La identitat anterior ens dona

$$X_x(k)Y_x - Y_x(k)X_x = 0.$$

Com que Y_x i X_x són linealment independents, $X_x(k) = Y_x(k) = 0$. Com que X_x és arbitrari, $X_x(k) = 0$ per a tot $x \in M$ implica que k és constant, ja que M és connexa. ■

14 Tensor de Ricci i curvatura escalar

Sigui R el tensor de curvatura. $R \in \mathcal{I}_3^1(M)$. Definim el tensor de Ricci, que designarem per Ric , per la fórmula $\text{Ric} = C_1^1(R) \in \mathcal{I}_2^0(M)$. Designarem per R_{ij} les components del tensor de Ricci en una carta local:

$$\text{Ric} = R_{ij} dx^i \otimes dx^j. \quad (5.21)$$

L'expressió del tensor de curvatura en una carta local tindrà la forma següent:

$$R = a_{jkh}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^h.$$

Volem relacionar els a_{jkh}^i amb els R_{jkh}^i definits a l'apartat 7. Per la identificació de $T_x(M) \otimes (\otimes^3 T_x(M)^*)$ amb $\mathcal{L}(T_x(M), T_x(M), T_x(M); T_x(M))$ tenim que

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \frac{\partial}{\partial x^h} = a_{jkh}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Però, a l'apartat 7, havíem posat

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \frac{\partial}{\partial x^h} = R_{hjk}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Per tant, $a_{jkh}^i = R_{hjk}^i$. Resumint, tindrem l'expressió següent:

$$R = R_{hjk}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^h. \quad (5.22)$$

Tindrem

$$\text{Ric} = C_1^1(R) = R_{hik}^i dx^k \otimes dx^h.$$

Comparant amb (5.21) tindrem

$$R_{kh} = R_{hik}^i. \quad (5.23)$$

Ara volem veure que el tensor de Ricci és simètric.

Proposició 5.33 *El tensor de Ricci és simètric.*

DEMOSTRACIÓ. Situem-nos en una carta local. Hem de provar que $R_{ij} = R_{ji}$. La primera identitat de Bianchi ens diu

$$R_{hjk}^i + R_{jkh}^i + R_{khi}^i = 0.$$

Fent $i = j$ i sumant respecte a i tindrem

$$R_{hik}^i + R_{ikh}^i + R_{khi}^i = 0.$$

Com que $R_{khi}^i = -R_{kih}^i = -R_{kh}$, la identitat anterior s'escriu

$$R_{hk} + R_{ikh}^i - R_{kh} = 0.$$

Si demostrem que $R_{ikh}^i = 0$, la proposició quedarà demostrada. Posem

$$\begin{aligned} R_{ikh}^i &= (\text{ja que } g^{ij}g_{jr} = \delta_{ir}) = g^{ij}g_{jr}R_{ikh}^r = g^{ij}g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^h}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= (\text{en virtut de la proposició 5.18}) = -g^{ij}g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^h}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= -g^{ij}g_{ir}R_{jkh}^r = -R_{jkh}^j. \blacksquare \end{aligned}$$

15 Curvatura escalar i divergència del tensor de Ricci

Es defineix la curvatura escalar com la funció R donada per $R = C(\sharp \text{Ric})$, on C és la contracció. Recordem que a l'apartat 12 havíem definit

$$\sharp: \mathcal{I}_2^0(M) \longrightarrow \mathcal{I}_1^1(M).$$

Per tant, $\sharp \text{Ric} \in \mathcal{I}_1^1(M)$. La contracció C , l'única possible, aplicada a $\sharp \text{Ric}$, donarà un escalar. En una carta local tindrem

$$\begin{aligned} \text{Ric} &= R_{ij}dx^i \otimes dx^j \\ \sharp \text{Ric} &= g^{ik}R_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^j \\ R &= C(\sharp \text{Ric}) = g^{ih}R_{ih}. \end{aligned}$$

Proposició 5.34 *Es compleix $\text{div}(\text{Ric}) = \frac{1}{2}dR$, on dR vol dir la diferencial exterior de la curvatura escalar.*

DEMOSTRACIÓ. Fem els càlculs en una carta local. En virtut de la segona identitat de Bianchi tindrem

$$\nabla_r R_{jkh}^i + \nabla_h R_{jrk}^i + \nabla_k R_{jhr}^i = 0.$$

L'últim terme serà igual a $-\nabla_k R_{jrh}^i$. Fent $i = r$ a la identitat anterior i sumant respecte a i tindrem

$$\nabla_i R_{jkh}^i + \nabla_h R_{jik}^i - \nabla_k R_{jih}^i = 0.$$

D'aquí deduïm

$$g^{jk} \nabla_i R_{jkh}^i + g^{jk} \nabla_h R_{jik}^i - g^{jk} \nabla_k R_{jih}^i = 0. \quad (5.24)$$

Per continuar la demostració, cal transformar el primer membre de (5.24) d'acord amb el lema següent:

Lema 5.35 *Es compleix*

$$g^{jk} \nabla_i R_{jkh}^i = -g^{ir} \nabla_i R_{rkh}^k.$$

DEMOSTRACIÓ. Tenim

$$\begin{aligned} R_{jkh}^i &= \underbrace{(g^{ir} g_{rm})}_{=\delta_{im}} R_{jkh}^m = g^{ir} g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, R \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^h} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = (\text{en virtut} \\ &\text{de la proposició 5.18}) = -g^{ir} g \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, R \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^h} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= -g^{ir} g_{jm} R_{rkh}^m. \end{aligned}$$

Llegint la igualtat anterior des del principi fins al final, tenim

$$R_{jkh}^i = -g^{ir} g_{jm} R_{rkh}^m.$$

D'aquí s'obté

$$g^{jk} R_{jkh}^i = -g^{ir} R_{rkh}^k. \quad (5.25)$$

Apliquem $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$ al tensor C de components $C_h^i = g^{jk} R_{jkh}^i$ (primer membre de (5.25)) i sumem respecte a i ; obtindrem

$$(\nabla_i g^{jk}) R_{jkh}^i + g^{jk} \nabla_i R_{jkh}^i.$$

Ara bé, $\nabla_i g^{jk} = 0$. En efecte, de la identitat

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0,$$

s'obté $\nabla_X g = 0$. Per tant, $\nabla_i g_{jk} = 0$. Ara bé, (g^{jk}) és la matriu inversa de (g_{jk}) . En llenguatge matricial, volem veure que $\nabla_i(g^{-1}) = 0$ on $g = (g_{ij})$. De $gg^{-1} = I$ es dedueix

$$\underbrace{(\nabla_i g)g^{-1}}_{=0} + g\nabla_i g^{-1} = 0,$$

d'on $\nabla_i g^{-1} = 0$.

Com que $\nabla_i g^{jk} = 0$, aplicant ∇_i als dos membres de (5.25) s'obté el lema. ■

Continuació de la demostració de la proposició. Aplicant el lema a la identitat (5.24) tindrem

$$-g^{ir}\nabla_i R_{rkh}^k + g^{jk}\nabla_h R_{jik}^i - g^{jk}\nabla_k R_{jih}^i = 0.$$

O sigui

$$-g^{ir}\nabla_i R_{rh} + g^{jk}\nabla_h R_{jk} - g^{jk}\nabla_k R_{jh} = 0.$$

El primer i l'últim terme són iguals. Tenint en compte que $\nabla_i g^{ir} = 0$, això es pot escriure:

$$-2(\operatorname{div} \operatorname{Ric})_h + \nabla_h R = 0.$$

Ara bé, com que R és una funció, $\nabla_h R = \partial R / \partial x^h$. La igualtat anterior implicarà, doncs, $2 \operatorname{div} \operatorname{Ric} = dR$. ■

Corol·lari 5.36 $\operatorname{div}(\operatorname{Ric}) = \frac{1}{2} \operatorname{div}(Rg)$, on R és la curvatura escalar i g la mètrica.

DEMOSTRACIÓ. Basta provar que $\operatorname{div}(Rg) = dR$. En una carta local tindrem

$$(\operatorname{div}(Rg))_h = \nabla_i (Rg^{ik} g_{kh}) = (\nabla_i R)g^{ik} g_{kh} = \nabla_h R = \frac{\partial R}{\partial x^h} \quad \cdot \quad \blacksquare$$

Capítol 6

Integració i fórmula de Stokes

1 Varietats amb vora

Definició 6.1 Designarem per H_n el semiespai de $\mathbf{R}^n$ format pels punts x amb l'última coordenada $x^n \geq 0$. Considerarem sempre a H_n la topologia induïda per $\mathbf{R}^n$, o sigui, els oberts de H_n seran sempre interseccions d'oberts de $\mathbf{R}^n$ amb H_n . Designarem per ∂H_n el subconjunt de H_n format per l'hiperplà $x^n = 0$.

Sigui U un obert de H_n i V un obert de H_m . Direm que una aplicació $f: U \rightarrow V$ és diferenciable, de classe C^k , si existeixen oberts U' i V' de $\mathbf{R}^n$ i $\mathbf{R}^m$ respectivament, amb $U \subset U'$, $V \subset V'$, i una aplicació $\tilde{f}$ de classe C^k de U' en V' tal que $\tilde{f}|U = f$.

Si U i V són dos oberts de H_n , direm que una aplicació $f: U \rightarrow V$ és un difeomorfisme de classe C^k si existeixen oberts U' , V' de $\mathbf{R}^n$, amb $U \subset U'$, $V \subset V'$, i un difeomorfisme $\tilde{f}$ de U' en V' de classe C^k tal que $\tilde{f}|U = f$ i $f(U) = V$.

Proposició 6.2 Sigui $f: U \rightarrow V$ un difeomorfisme entre dos oberts de H_n . Si $U \cap \partial H_n = \emptyset$, llavors $V \cap \partial H_n = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓ. Siguin U' , V' oberts de $\mathbf{R}^n$ amb $U \subset U'$, $V \subset V'$ i sigui $\tilde{f}$ un difeomorfisme $U' \rightarrow V'$ amb $\tilde{f}|U = f$ i $f(U) = V$. Si $U \cap \partial H_n = \emptyset$, U és obert de $\mathbf{R}^n$. Llavors $V = f(U)$ ha de ser obert de $\mathbf{R}^n$ perquè és imatge d'un obert per un difeomorfisme. Llavors V no podrà tallar la vora. ■

Corol·lari 6.3 Sigui $f: U \rightarrow V$ un difeomorfisme entre dos oberts de H_n . Si $U \cap \partial H_n \neq \emptyset$ i $x \in U \cap \partial H_n$, llavors $f(x) \in \partial H_n$.

DEMOSTRACIÓ. Si $f(x) \notin \partial H_n$, podríem trobar un entorn obert A de $f(x)$, $A \subset V$, tal que $A \cap \partial H_n = \emptyset$. Per la proposició anterior aplicada al difeomor-

fisme f^{-1} , es tindria $f^{-1}(A) \cap \partial H_n = \emptyset$. Com que $x \in f^{-1}(A)$, x no podria ser de ∂H_n , en contra de la hipòtesi. ■

Definició 6.4 Un atlas de classe C^k modelat a H_n , sobre un espai topològic M , Hausdorff, consisteix en una col·lecció de parells $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$, on els U_i són oberts de M i els ψ_i són homeomorfismes de U_i sobre un obert $\psi_i(U_i)$ de H_n , de tal manera que:

$$1) \cup U_i = M.$$

$$2) \text{ Si } U_i \cap U_j \neq \emptyset, \text{ l'aplicació}$$

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1}: \psi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \psi_j(U_i \cap U_j)$$

és un difeomorfisme de classe C^k de l'obert $\psi_i(U_i \cap U_j)$ de H_n en l'obert $\psi_j(U_i \cap U_j)$ de H_n .

Tal com havíem fet en les varietats diferenciables ordinàries, aquí podem definir el concepte d'equivalència entre dos atlas de classe C^k modelats a H_n .

Una *varietat diferenciable* amb vora, de classe C^k i dimensió n , consisteix, per definició, en un espai topològic M , Hausdorff i paracompacte, dotat d'una classe d'equivalència d'atlas de classe C^k , modelats a H_n . Es diu que un punt $x \in M$ és de la vora si per a cada carta local (U_i, ψ_i) , amb $x \in U_i$, es compleix $\psi_i(x) \in \partial H_n$. El corollari anterior assegura que si per a una carta local (U_i, ψ_i) , amb $x \in U_i$, es compleix $\psi_i(x) \in \partial H_n$, per a qualsevol altra carta local (U_j, ψ_j) , amb $x \in U_j$, també es compleix $\psi_j(x) \in \partial H_n$.

El conjunt de punts de M que són de la vora serà designat per ∂M . Sigui M una varietat amb vora. Sigui $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ un atlas de M . Sigui I' el subconjunt de I format pels $i \in I$ tals que $U_i \cap \partial M \neq \emptyset$. Es pot veure immediatament que $\{(U_i \cap \partial M, \psi_i|_{U_i \cap \partial M})\}_{i \in I'}$ constitueix un atlas ordinari de ∂M de dimensió $n-1$. D'aquesta manera ∂M és una varietat diferenciable ordinària de dimensió $n-1$.

Tal com hem fet en les varietats ordinàries, en les varietats amb vora es defineixen els conceptes d'aplicació diferenciable, funció diferenciable, espai tangent, etc.

Observació. Si M és una varietat diferenciable ordinària, de les que hem considerat fins ara (o sigui, sense vora) és fàcil trobar un atlas $\{(U_i, \psi_i)\}$ de M tal que cada $\psi_i(U_i)$ estigui contingut a $\mathring{H}_n$. D'aquesta manera M pot ser considerada una varietat amb vora, amb $\partial M = \emptyset$.

Exemple. La bola unitat de $\mathbf{R}^2$, $B_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ amb } x^2 + y^2 \leq 1\}$ pot dotar-se de manera natural d'una estructura de varietat amb vora de dimensió

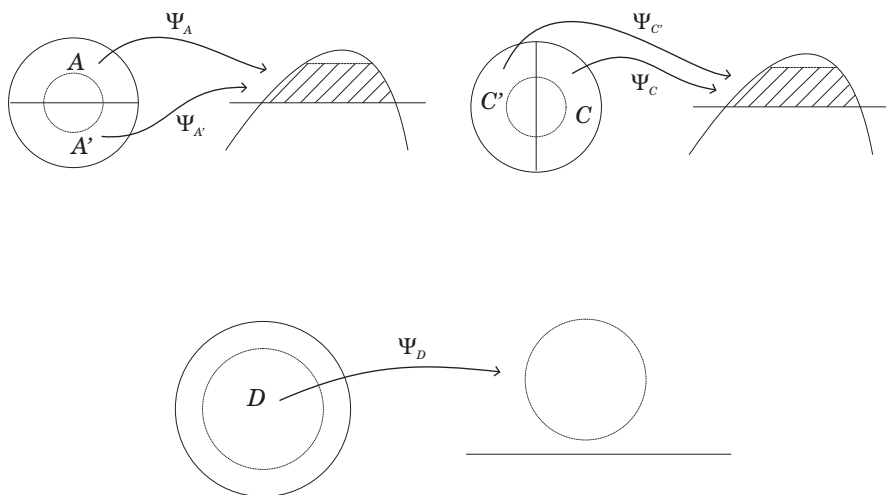


Figura 6.1

2 i classe C^∞ , de la manera següent. Considerem els següents oberts de B_2 :

$$\begin{aligned}
 A &= \{(x, y) \text{ tals que } \tfrac{1}{2} < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, y > 0\} \\
 A' &= \{(x, y) \text{ tals que } \tfrac{1}{2} < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, y < 0\} \\
 C &= \{(x, y) \text{ tals que } \tfrac{1}{2} < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, x > 0\} \\
 C' &= \{(x, y) \text{ tals que } \tfrac{1}{2} < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, x < 0\} \\
 D &= \{(x, y) \text{ tals que } \sqrt{x^2 + y^2} < \tfrac{3}{4}\} .
 \end{aligned}$$

Sigui ψ_A l'aplicació $(x, y) \longrightarrow (x^*, y^*)$ de A en H_2 donada per

$$\begin{cases} x^* = x \\ y^* = 1 - x^2 - y^2 \end{cases} .$$

Anàlogament, definim $\psi_{A'}$ de A' en H_2 , ψ_C de C en H_2 , $\psi_{C'}$ i ψ_D per

$$\begin{aligned} \psi_{A'} & \begin{cases} x^* = x \\ y^* = 1 - x^2 - y^2 \end{cases} & \psi_C & \begin{cases} x^* = y \\ y^* = 1 - x^2 - y^2 \end{cases} \\ \psi_{C'} & \begin{cases} x^* = y \\ y^* = 1 - x^2 - y^2 \end{cases} & \psi_D & \begin{cases} x^* = x \\ y^* = y + 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

$\{(A, \psi_A), (A', \psi_{A'}), (C, \psi_C), (C', \psi_{C'}), (D, \psi_D)\}$ formen un atlas sobre B_2 , modelat a H_2 , que dota B_2 d'una estructura de varietat diferenciable amb vora.

Definició 6.5 (Vectors exteriors i interiors) *Sigui M una varietat amb vora, i $p \in M$. Diem que un vector $X \in T_p(M)$ és interior si*

- 1) *Per a tota funció $f \geq 0$, diferenciable, definida en un entorn de p i tal que $f(p) = 0$, es té $X(f) \geq 0$.*
- 2) *Existeix una f que compleix les propietats d'1) per a la qual $X(f) > 0$.*

Un vector $X \in T_p(M)$ es diu exterior si:

- 1) *Per a tota funció $f \geq 0$, diferenciable, definida en un entorn de p i tal que $f(p) = 0$, es té $X(f) \leq 0$.*
- II) *Existeix una f que compleix les propietats d'1) per a la qual $X(f) < 0$.*

Proposició 6.6 *Els vectors interiors i exteriors existeixen solament en els punts $p \in \partial M$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui p un punt que no sigui de ∂M . Sigui (U, φ) una carta local, amb $p \in U$. Sigui f una funció diferenciable, amb $f \geq 0$ i $f(p) = 0$. Sobre qualsevol recta de $\varphi(U)$ que passi per $\varphi(p)$, la funció $f \circ \varphi^{-1}$ tindrà un mínim local a $\varphi(p)$ o bé serà constant en un petit entorn de $\varphi(p)$ sobre aquesta recta. En qualsevol cas, la derivada direccional de $f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(p)$ en aquella direcció s'anul·larà. Així doncs, si $x^1 \dots x^n$ designen les funcions coordenades corresponents a la carta local, identificant (com hem fet sempre) U i $\varphi(U)$, tindrem $(\partial f / \partial x^i)_p = 0$. D'aquí deduïm que si $X \in T_p(M)$

$$X(f) = \sum X^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p = 0.$$

Per tant, 2) no es pot complir mai en el punt p . ■

Sigui ara $p \in \partial M$ i $X \in T_p(M)$. Sigui $(U, x^1 \dots x^n)$ una carta local valorada a H_n , que contingui p i tal que, en aquestes coordenades, $p = (0 \dots 0)$. Si f és una funció que compleix 1), un argument similar a l'anterior prova que $(\partial f / \partial x^i)_p = 0$ per a $i = 1 \dots n-1$, i que $(\partial f / \partial x^n)_p \geq 0$. De tot això deduïm que un $X \in T_p(M)$ és interior si i només si

$$X = X^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p + \dots + X^n \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p,$$

amb $X^n > 0$, i és exterior si $X^n < 0$.

2 Orientació en varietats

Comencem definint el que entenem per orientació en un espai vectorial E de dimensió n . El producte exterior $\wedge^n E^*$ tindrà dimensió 1. Direm que dos elements v i w de $\wedge^n E^* - \{0\}$ són equivalents si $v = \lambda w$, amb $\lambda > 0$. Aquesta relació d'equivalència divideix $\wedge^n E^* - \{0\}$ en dues classes. Orientar E consisteix a elegir una d'aquestes classes i anomenar-la positiva. Tots els elements d'aquesta classe els anomenarem positius. Recordem que, tal com sabem del capítol 1, $\wedge^n E^* \subset \otimes^n E^* \cong \mathcal{L}(E, \dots, E; \mathbf{R})$. Per tant, tot $\omega \in \wedge^n E^*$ es pot pensar com una aplicació de $E \times \dots \times E$ en $\mathbf{R}$. Si $e_1 \dots e_n$ és base de E , direm que $e_1 \dots e_n$ és base positiva si per a un ω positiu de $\wedge^n E^*$ es compleix $\omega(e_1 \dots e_n) > 0$. Observem que si ω' és un altre element positiu de $\wedge^n E^*$, com que $\omega' = \lambda \omega$ amb $\lambda > 0$, també $\omega'(e_1 \dots e_n) > 0$.

Si E i F són dos espais vectorials orientats i $f: E \rightarrow F$ és un isomorfisme, es diu que f conserva l'orientació si aplica bases positives en bases positives.

Sigui M una varietat diferenciable (amb o sense vora). Es diu que M està orientada, o bé que M està dotada d'una orientació, si per a cada $x \in M$ hem elegit una orientació en cada espai tangent $T_x(M)$ de manera que es compleixi la següent condició de coherència: per a cada carta local (U, φ) de M , amb U connex, podem elegir una orientació de $\mathbf{R}^n$ tal que totes les aplicacions lineals tangents $\varphi_*: T_x(M) \rightarrow \mathbf{R}^n$ en tots els $x \in U$ conservin l'orientació.

Una varietat diferenciable M es diu orientable si es pot dotar d'una orientació.

Proposició 6.7 *Sigui M una varietat diferenciable (amb o sense vora). Les tres afirmacions següents són equivalents:*

- 1) M és orientable.

2) Existeix un atlas de M amb tots els jacobians dels canvis de coordenades positius.

3) Existeix sobre M una n -forma diferencial que no s'anulla en cap punt.

DEMOSTRACIÓ. 1) $\Rightarrow$ 2). Sigui $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ un atlas de M , amb els U_i connexos. Elegim a $\mathbf{R}^n$ l'orientació canònica que consisteix a dir que la base canònica és positiva. Sigui f l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (x^1, \dots, x^n) & \longmapsto & (x^2, x^1, x^3, \dots, x^n) . \end{array}$$

Situem-nos en una carta local (U_i, φ_i) . Com que es compleix 1), podem elegir una orientació de $\mathbf{R}^n$ tal que per a cada $x \in U_i, (\varphi_i)_*: T_x(M) \rightarrow \mathbf{R}^n$ conservi les orientacions. Si l'orientació que hem hagut d'escollir a $\mathbf{R}^n$ perquè això es compleixi no és la canònica, definim $\psi_i = f \circ \varphi_i$. En cas contrari posem $\psi_i = \varphi_i$. L'atlas $\{(U_i, \psi_i)\}$ complirà la propietat següent: elegida a $\mathbf{R}^n$ l'orientació canònica, les $(\psi_i)_*$ conserven les orientacions. Per tant, si $x \in U_i \cap U_j$, l'aplicació $(\psi_j)_* \circ (\psi_i)^{-1}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ conservarà l'orientació canònica de $\mathbf{R}^n$. Això implica 2).

2) $\Rightarrow$ 3). Sigui $\{(U_i, \psi_i)\}$ un atlas que compleixi 2). Per tal com hem suposat la varietat paracompacta (ho hem exigit a la definició de varietat), existirà un refinament $\{V_j\}_{j \in J}$ de $\{U_i\}_{i \in I}$, localment finit. Elegim per a cada j un $i = \tau(j)$ tal que $V_j \subset U_{\tau(j)}$. Posem $\varphi_j = \psi_{\tau(j)}|_{V_j}$. Llavors $\{(V_j, \varphi_j)\}$ serà un atlas localment finit que complirà 2). Sigui $\{v_j\}$ una partició de la unitat subordinada a aquest recobriment. Siguin $x_j^1 \dots x_j^n$ les coordenades corresponents a la carta local (V_j, φ_j) . Sigui ω la n -forma definida per

$$\omega_x = \sum_{j \in J} v_j(x) dx_j^1 \wedge \dots \wedge dx_j^n . \quad (6.1)$$

El sumatori anterior té un nombre finit de termes no nuls. ω és una n -forma diferencial global. Si $p \in U_i \cap U_j$ tindrem

$$(dx_j^1 \wedge \dots \wedge dx_j^n)_p = \det \left(\frac{\partial x_j^k}{\partial x_i^s} \right) (dx_i^1 \wedge \dots \wedge dx_i^n)_p .$$

Referint tots els termes de (6.1) a les coordenades $(x_i^1 \dots x_i^n)$ tindrem

$$\omega_p = \left(\sum_{\substack{j \text{ tals que} \\ U_j \cap U_i \ni p}} v_j(p) \det \left(\frac{\partial x_j^k}{\partial x_i^s} \right)_p \right) dx_i^1 \wedge \dots \wedge dx_i^n .$$

D'aquí es dedueix $\omega_p \neq 0$.

3) $\Rightarrow$ 1). Si tenim una n -forma ω que no s'anul·la en cap punt, podrem orientar $T_x(M)$ dient que la classe positiva de $\wedge^n T_x(M)^* - \{0\}$ és la que conté ω_x . És fàcil veure que amb aquesta definició es compleix la condició de coherència exigida perquè M sigui orientada. ■

Orientació de la vora, en les varietats amb vora. Sigui M una varietat amb vora. Un camp exterior sobre ∂M consisteix, per definició, a assignar a cada $x \in \partial M$ un vector $X_x \in T_x(M)$ que sigui exterior. En una carta local $(U, x^1 \dots x^n)$ valorada a H_n , amb $U \cap \partial M \neq \emptyset$, X s'expressarà

$$X = \sum_{i=1}^n X^i(x^1 \dots x^{n-1}) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x^1 \dots x^{n-1}, 0)},$$

amb $X^n < 0$. El camp es diu diferenciable si per a tota carta local com l'anterior, les funcions $X^i(x^1 \dots x^{n-1})$ són diferenciables.

Proposició 6.8 *En una varietat diferenciable amb vora, sempre existeix un camp exterior diferenciable.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $\{(U_i, x_i^1 \dots x_i^n)\}_{i \in I}$ un atlas de M tal que $\{U_i\}_{i \in I}$ sigui un recobriment localment finit de M . Sigui I' el subconjunt de I format pels i tals que $U_i \cap \partial M \neq \emptyset$. Sigui $\{u_i\}_{i \in I'}$ una partició de la unitat subordinada al recobriment $\{(U_i \cap \partial M)\}_{i \in I'}$ de ∂M . Sobre cada $U_i \cap \partial M$ prenguem el camp exterior $X_i = -\frac{\partial}{\partial x_i^n}$. El camp $X = \sum u_i X_i$ és global, diferenciable i exterior. ■

Sigui M una varietat amb vora. Suposem que M és orientada, i sigui ω una n -forma que no s'anul·la en cap punt i que doni l'orientació de M . Sigui X un camp exterior diferenciable. Es pot veure immediatament que l'orientació de ∂M donada per la $(n-1)$ -forma sobre ∂M $\eta = i(X)\omega|_{\partial M}$ no depèn del camp exterior X , on $i(X)\omega$ indica la contracció interior de ω per X definida al capítol 1, apartat 7. Prendrem sobre ∂M l'orientació donada per η . En un punt qualsevol $x \in \partial M$, si $e_2 \dots e_n$ és base de $T_x(\partial M)$, $X_x, e_2 \dots e_n$ serà base de $T_x(M)$. En aquesta base $\eta(e_2 \dots e_n) = nX^i\omega_{i2\dots n}$, però en la base $X, e_2 \dots e_n$, $X^1 = 1, X^2 = \dots = X^n = 0$. Tindrem $\eta(e_2 \dots e_n) = n\omega_{12\dots n} = n\omega(X, e_2 \dots e_n)$. Per tant, $e_2 \dots e_n$ serà base positiva de $T_x(\partial M)$ si $X, e_2 \dots e_n$ és base positiva de $T_x(M)$. Per exemple, si considerem H_n com a varietat amb vora, amb l'orientació canònica donada per la n -forma $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$,

l'orientació de ∂H_n vindrà donada per

$$\begin{aligned} \eta &= i \left(-\frac{\partial}{\partial x^n} \right) (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = dx^1 \underbrace{\left(-\frac{\partial}{\partial x^n} \right) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n}_{=0} + \dots \\ &+ (-1)^{n-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \left(dx^n \left(-\frac{\partial}{\partial x^n} \right) \right) = (-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}. \end{aligned}$$

3 Integració en varietats orientades

Recordem la fórmula del canvi de variables a $\mathbf{R}^n$, que suposarem coneguda. Si U és un obert acotat de $\mathbf{R}^n$, i $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ un difeomorfisme, la fórmula del canvi de variable diu

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A |J\varphi| (f \circ \varphi), \quad (6.2)$$

on A és qualsevol conjunt mesurable contingut a U i f qualsevol funció mesurable sobre $\varphi(U)$. $J\varphi$ designa el jacobiana del canvi. Si $J\varphi > 0$, podem suprimir el valor absolut en la fórmula anterior. Suposem que φ ve donat per

$$(x^1 \dots x^n) \rightarrow (y^1 \dots y^n),$$

on $y^i = \varphi^i(x^1 \dots x^n)$. Si ω és una n -forma sobre $\varphi(U)$, ω s'escriurà

$$\omega = f(y^1 \dots y^n) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n.$$

Definim $\int_{\varphi(A)} \omega$ com la integral de la funció f , $\int_{\varphi(A)} f$. Amb aquesta notació, quan $J\varphi > 0$ podem escriure la fórmula (6.2) de manera molt més simple, així:

$$\int_{\varphi(A)} \omega = \int_A \varphi^*(\omega). \quad (6.3)$$

En efecte

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega) &= f(y^1(x^1 \dots x^n), \dots, y^n(x^1 \dots x^n)) \frac{\partial y^1}{\partial x^{j_1}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial y^n}{\partial x^{j_n}} dx^{j_n} = \\ &= (f \circ \varphi) \varepsilon_{1 \dots n}^{j_1 \dots j_n} \frac{\partial y^1}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^n}{\partial x^{j_n}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \\ &= (f \circ \varphi)(J\varphi) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Aquest és el motiu profund d'integrar n -formes en lloc de funcions. Per definir la integral d'una n -forma sobre una varietat, haurem de suposar que aquesta és orientada perquè els jacobians dels canvis de coordenades siguin positius i puguem aplicar la fórmula (6.3).

Sigui M una varietat diferenciable orientada (amb o sense vora). Sigui $\{(U_i, \psi_i)\}$, $i \in I$, un atlas tal que en cada $x \in U_i$ l'aplicació $(\psi_i)_*: T_x(M) \rightarrow \mathbf{R}^n$ preservi les orientacions, considerant a $\mathbf{R}^n$ l'orientació canònica. Suposem, a més, que $\{U_i\}_{i \in I}$ és un recobriment localment finit, amb els $\bar{U}_i$ compactes. Busquem una definició natural de $\int_M \omega$ quan ω és una n -forma sobre M amb suport compacte. Elegim una partició diferenciable de la unitat, $\{u_i\}_{i \in I}$, subordinada al recobriment $\{U_i\}$. Tindrem $\omega = \sum_{i \in I} u_i \omega$. Com que ω té suport compacte K i només hi ha un nombre finit de U_i que tallen K , al sumatori anterior només hi ha un nombre finit de termes no nuls. Si volem que la integral que anem a definir compleixi les propietats habituals, haurem de tenir

$$\int_M \omega = \int_M \sum_i u_i \omega = \sum_i \int_M u_i \omega = \sum \int_{U_i} u_i \omega$$

(ja que el suport de $u_i \omega$ està contingut a U_i), i per la fórmula del canvi de variable,

$$\int_{U_i} u_i \omega = \int_{\psi_i(U_i)} (\psi_i^{-1})^*(u_i \omega).$$

Per tant,

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{\psi_i(U_i)} (\psi_i^{-1})^*(u_i \omega) .$$

Podem, doncs, prendre la fórmula anterior com a definició d'integral. Perquè això tingui sentit basta només que les $(\psi_i^{-1})^*(u_i \omega)$ siguin mesurables. La integral així definida compleix $\int_M (\omega + \omega') = \int_M \omega + \int_M \omega'$ i $\int_M k\omega = k \int_M \omega$, quan k és constant.

Vegem ara que la integral no depèn ni de l'atlas ni de la partició de la unitat elegits. Si $\{(V_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$ és un altre atlas amb les mateixes propietats, i $\{v_j\}_{j \in J}$ una partició de la unitat subordinada a aquest atlas, tindrem

$$u_i \omega = \sum_{j \in J} v_j u_i \omega .$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \int_{\psi_i(U_i)} (\psi_i^{-1})^*(u_i \omega) &= \sum_{i \in I} \int_{\psi_i(U_i)} (\psi_i^{-1})^* \left(\sum_{j \in J} v_j u_i \omega \right) = \\ &= \sum_{i,j} \int_{\psi_i(U_i)} (\psi_i^{-1})^* (v_j u_i \omega). \end{aligned}$$

Ara bé, com que el suport de $(\psi_i^{-1})^*(v_j u_i \omega)$ està contingut a $\psi_i(V_j \cap U_i)$, tindrem

$$\begin{aligned} \int_{\psi_i(U_i)} (\psi_i^{-1})^*(v_j u_i \omega) &= \int_{\psi_i(V_j \cap U_i)} (\psi_i^{-1})^*(v_j u_i \omega) = \text{(fórmula del} \\ \text{canvi de variable)} &= \int_{\varphi_j(V_j \cap U_i)} (\psi_i \circ \varphi_j^{-1})^* (\psi_i^{-1})^*(v_j u_i \omega) = \\ &= \int_{\varphi_j(V_j \cap U_i)} (\varphi_j^{-1})^*(v_j u_i \omega) = \int_{\varphi_j(V_j)} (\varphi_j^{-1})^*(v_j u_i \omega). \end{aligned}$$

Resumint, tenim

$$\sum_i \int_{\psi_i(U_i)} (\psi_i^{-1})^*(u_i \omega) = \sum_{i,j} \int_{\varphi_j(V_j)} (\varphi_j^{-1})^*(v_j u_i \omega) = \sum_j \int_{\varphi_j(V_j)} (\varphi_j^{-1})^*(v_j \omega).$$

Proposició 6.9 Si el suport de ω està contingut en una carta local (U, ψ) , llavors

$$\int_M \omega = \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^* \omega.$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui K el suport de ω . Prenguem un recobriment $\{V_j\}_{j \in J}$ localment finit del complementari de K , tal que els V_j siguin dominis de cartes locals (V_j, ψ_j) . Llavors U i els V_j formen un recobriment localment finit de M . Sigui $\{u, v_j\}_{j \in J}$ una partició de la unitat subordinada al recobriment anterior. u val 1 sobre K ja que els v_j s'hi anul·len. Per definició d'integral tindrem

$$\int_M \omega = \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^*(u\omega) + \sum_j \int_{\psi_j(V_j)} (\psi_j^{-1})^* \underbrace{(u_j \omega)}_{=0} = \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^* \omega. \quad \blacksquare$$

4 Fórmula de Stokes

Teorema 6.10 Sigui M una varietat orientada amb vora. Sigui n la dimensió de M , i ω una $(n-1)$ -forma amb suport compacte. Es compleix

$$\int_{\partial M} (\omega|_{\partial M}) = \int_M d\omega,$$

on a ∂M es considera l'orientació induïda per l'orientació de M .

DEMOSTRACIÓ. Demostrem primer el teorema en el cas que $M = H_n$. Sigui P un paral·lelepípede de H_n de la forma $P = \{\vec{x} \in H_n \text{ tals que } a^i \leq x^i \leq b^i\}$ que contingui el suport de ω i que tingui una cara continguda a ∂H_n ; és a dir, $a^n = 0$. Com que és de grau $n - 1$, ω serà de la forma

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}^i \wedge \dots \wedge dx^n ,$$

on, com sempre, $\hat{dx}^i$ indica que el factor dx^i no hi és. Anomenem T la suma de tots els termes del sumatori anterior que corresponen a $i \neq n$. Tindrem

$$\begin{aligned} \omega &= f_n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} + T \\ d\omega &= \frac{\partial f_n}{\partial x^n} dx^n \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} + dT = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\partial f_n}{\partial x^n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n + dT . \end{aligned}$$

Tindrem

$$\int_{H_n} d\omega = \int_P d\omega = (-1)^{n+1} \int_P \frac{\partial f_n}{\partial x^n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n + \int_P dT .$$

Recordem que per la definició que hem donat d'integració de n -formes a $\mathbf{R}^n$, la integral

$$\int_P \frac{\partial f_n}{\partial x^n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

vol dir integral sobre P de la funció $\partial f_n / \partial x^n$. Pel teorema de Fubini, podem començar integrant aquesta funció per la variable x^n . Llavors, pel teorema fonamental del càlcul, tindrem

$$\int_P \frac{\partial f_n}{\partial x^n} = \int_{\{a^i \leq x^i \leq b^i, i=1 \dots n-1\}} (f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, b^n) - f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)) .$$

Però com que P conté el suport de ω , $d\omega$ s'anul·larà sobre $x^n = b^n$, per la qual cosa tindrem

$$\int_P \frac{\partial f_n}{\partial x^n} = - \int_{P \cap \partial H_n} f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) .$$

Ara bé, si a H_n posem l'orientació canònica, aquesta orientació induïx sobre ∂H_n l'orientació donada per la $(n - 1)$ -forma $(-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Prenent,

llavors, aquesta orientació sobre ∂H_n , tindrem

$$\begin{aligned} \int_{P \cap \partial H_n} f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) &= \\ &= (-1)^n \int_{P \cap \partial H_n} f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} . \end{aligned}$$

Per tant,

$$\int_{H_n} d\omega = \int_{\partial H_n} f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} + \int_P dT .$$

Cada un dels termes que constitueixen dT s'anul·larà quan integrem sobre P . Per exemple, el terme $d(f_2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n)$ serà $-(\partial f_2 / \partial x^2) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Quan l'integrem sobre P respecte a la variable x^2 , tindrem

$$\int_{\{a^i \leq x^i \leq b^i, i=1,3,\dots,n\}} (f_2(x^1, b^2, x^3, \dots, x^n) - f_2(x^1, a^2, x^3, \dots, x^n)) = 0 ,$$

ja que f_2 s'anul·la idènticament sobre $x^2 = b^2$ i sobre $x^2 = a^2$ perquè el suport de ω està contingut a P . Per tant,

$$\int_{H_n} d\omega = \int_{\partial H_n} (\omega|_{\partial H_n}) .$$

Demostrem ara el teorema en una varietat amb vora M qualsevol, orientada. Prenent un atlas $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ que compleixi les propietats de l'apartat anterior, i una partició $\{u_i\}_{i \in I}$ de la unitat, com que $\sum u_i = 1$, tindrem $\sum du_i = 0$. Llavors podrem escriure

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_M \sum u_i d\omega = \int_M \sum d(u_i \omega) = \sum \int_M d(u_i \omega) = \text{(proposició 6.9)} \\ &= \sum \int_{\psi_i(U_i)} (\psi_i^{-1})^* d(u_i \omega) = \sum \int_{\psi_i(U_i)} d((\psi_i^{-1})^* u_i \omega) . \end{aligned}$$

Disseminem per $\eta_{(i)}$ l'element $(\psi_i^{-1})^*(u_i \omega)$. Com que ja hem demostrat la fórmula de Stokes a H_n , si U_i talla ∂M tindrem

$$\int_{\psi_i(U)} d\eta_{(i)} = \int_{\psi_i(U_i) \cap \partial H_n} (\eta_{(i)}|_{\partial H_n}) ,$$

i, si U_i no talla ∂M , llavors $\int_{\psi_i(U_i)} d\eta_{(i)} = 0$. Sigui I' el subconjunt d'índexs i

tals que $U_i \cap \partial M \neq \emptyset$. Tindrem

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_{i \in I'} \int_{\psi_i(U_i)} d\eta_{(i)} = \sum_{i \in I'} \int_{\psi_i(U_i) \cap \partial H_n} \eta_{(i)} = \\ &= \sum_{i \in I'} \int_{\psi_i(U_i \cap \partial M)} (\psi_i^{-1})^*(u_i \omega) = \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

Això prova el teorema. ■

5 Teorema de la divergència

Teorema 6.11 (Teorema-definició) *Sigui M una varietat de Riemann orientada, de dimensió n , amb o sense vora. Existeix una n -forma diferencial η , diferenciable, tal que en cada punt x , si $e_1 \dots e_n$ és base ortonormal positiva de $T_x(M)$ i $\theta^1 \dots \theta^n$ és la base dual, $\eta_x = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$. Aquesta n -forma s'anomenarà element de volum.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $\{(U_i, x_i^1 \dots x_i^n)\}_{i \in I}$ un atlas de M tal que sobre cada U_i la base $\partial/\partial x_i^1 \dots \partial/\partial x_i^n$ sigui positiva. Pel procediment d'ortonormalització de Smith, fabriquem una base de n camps ortonormals sobre U_i , $X_{(i)1} \dots X_{(i)n}$. Sigui $\omega_{(i)}^1 \dots \omega_{(i)}^n$ la base dual. Designem per $\eta_{(i)}$ el producte exterior $\omega_{(i)}^1 \wedge \dots \wedge \omega_{(i)}^n$. Veurem que es compleix $\eta_{(i)} = \eta_{(j)}$ sobre $U_i \cap U_j$. En efecte, tindrem

$$X_{(i)k} = a_k^r X_{(j)r} ,$$

amb la matriu (a_k^r) tal que $\det(a_k^r) = 1$. Tindrem

$$\omega_{(j)}^k = a_s^k \omega_{(i)}^s .$$

Per tant,

$$\eta_{(j)} = \omega_{(j)}^1 \wedge \dots \wedge \omega_{(j)}^n = \underbrace{\det(a_s^k)}_{=1} \omega_{(i)}^1 \wedge \dots \wedge \omega_{(i)}^n = \eta_{(i)} .$$

Per tant, les $\eta_{(i)}$ defineixen una n -forma diferencial global que compleix totes les propietats desitjades. ■

Veurem a continuació com s'expressa l'element de volum η en una carta local $(U, x^1 \dots x^n)$. Sigui $X_1 \dots X_n$ l'ortonormalització de $\partial/\partial x^1 \dots \partial/\partial x^n$. Suposem que la carta local és tal que $\partial/\partial x^1 \dots \partial/\partial x^n$ és positiva. Posem

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = C_i^k X_k .$$

Si $\theta^1 \dots \theta^n$ és la base dual de $X_1 \dots X_n$, $\theta^i = C_j^i dx^j$, $\eta = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n = \det(C_j^i) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

Calculem $\det(C_j^i)$ en funció de la mètrica.

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = C_i^k C_j^s g(X_k X_s) = \sum_k C_i^k C_j^k.$$

Per tant $\det g_{ij} = (\det C_i^k)^2$, d'on $\det(C_i^k) = \sqrt{\det(g_{ij})}$. Per tant,

$$\eta = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Proposició 6.12 Si X és un camp qualsevol sobre M i η és l'element de volum, es compleix $\nabla_X \eta = 0$.

DEMOSTRACIÓ. Situem-nos en una carta local. Sigui $e_1 \dots e_n$ una base ortonormal positiva en aquesta carta local, i $\theta^1 \dots \theta^n$ la base dual. $\nabla_X \theta^i$ serà combinació lineal de $\theta^1 \dots \theta^n$. Posem

$$\nabla_X \theta^i = a_j^i \theta^j.$$

Provem en primer lloc que la matriu a_j^i és antisimètrica. Tindrem

$$a_k^i = a_j^i \theta^j(e_k) = (\nabla_X \theta^i)(e_k) = \underbrace{X(\theta^i(e_k))}_{=0} - \theta^i(\nabla_X e_k).$$

Sigui $\nabla_X e_k = b_k^j e_j$. Tindrem

$$a_k^i = -\theta^i(b_k^j e_j) = -b_k^i.$$

Per veure que (a_j^i) és antisimètrica, basta doncs provar que la matriu (b_k^i) ho és. De $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ deduïm

$$g(\nabla_X e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_X e_j) = 0.$$

Igualtat que s'escriu

$$b_i^k \delta_{kj} + \delta_{ik} b_j^k = 0.$$

O sigui,

$$b_i^j + b_j^i = 0.$$

Ara, la proposició resulta immediatament del càlcul següent:

$$\begin{aligned}
 \eta &= \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n \\
 \nabla_X \eta &= \nabla_X \theta^1 \wedge \theta^2 \dots \wedge \theta^n + \dots + \theta^1 \wedge \dots \wedge \nabla_X \theta^n = \\
 &= a_j^1 \theta^j \wedge \theta^2 \dots \wedge \theta^n + \dots + \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^{n-1} \wedge a_j^n \theta^j = \\
 &= (a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n) \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n .
 \end{aligned}$$

Com que la matriu (a_i^j) és antisimètrica, $\nabla_X \eta = 0$. ■

Teorema 6.13 (Teorema de la divergència) *Sigui M una varietat de Riemann orientada, amb vora. Sigui η l'element de volum, i ω l'element de volum de ∂M . Sigui N el camp exterior unitari normal en tot punt $x \in \partial M$ a $T_x(\partial M)$. En tot punt x de ∂M tindrem $X = X_n N + T$, on X_n és un escalar i T un vector tangent a ∂M . Anomenarem component normal de X l'escalar X_n . El teorema de la divergència afirma que*

$$\int_M (\operatorname{div} X) \eta = \int_{\partial M} X_n \omega .$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui $\alpha = i(X)\eta$ (contracció interior de η per X). Provem en primer lloc que $(\operatorname{div} X)\eta = d\alpha$. Situem-nos en una carta local $(U, x^1, \dots, x^n)$. η s'expressarà en aquesta carta de la forma següent:

$$\eta = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n .$$

Per tant,

$$i(X)\eta = f dx^1(X) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + (-1)^{n-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} (dx^n(X)) .$$

Tindrem, doncs,

$$\alpha = i(X)\eta = \sum_i (-1)^{i+1} f X^i dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}^i \wedge \dots \wedge dx^n .$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
 d\alpha &= \sum_i (-1)^{i+1} \frac{\partial(f X^i)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}^i \wedge \dots \wedge dx^n \\
 &= \left(\sum_i \frac{\partial(f X^i)}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n .
 \end{aligned}$$

Per veure que $d\alpha = (\operatorname{div} X)\eta$, hauríem de comprovar que

$$\sum_i \frac{\partial(fX^i)}{\partial x^i} = f \operatorname{div} X = f \nabla_i X^i .$$

Tenim

$$f \nabla_i X^i = f \left(\sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^i X^j \right) .$$

Expressem ara la condició que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \eta = 0$ (proposició 6.12).

Tindrem

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\partial/\partial x^j} (f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n - \\ &\quad - f \Gamma_{j1}^1 dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n - \dots - f \Gamma_{jn}^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n . \end{aligned}$$

Per tant

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = f \sum_i \Gamma_{ji}^i .$$

Substituint a la igualtat anterior, tindrem

$$f \nabla_i X^i = f \sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} X^j = \sum_i \frac{\partial(fX^i)}{\partial x^i} .$$

Això prova que $d\alpha = (\operatorname{div} X)\eta$. Per tant,

$$\int_M (\operatorname{div} X)\eta = \int_{\partial M} (\alpha|\partial M) .$$

Segui $N, e_2 \dots e_n$ una base ortonormal positiva de $T_x(M)$, on $x \in \partial M$. Segui $\theta^1 \dots \theta^n$ la base dual. En el punt x tindrem $\eta_x = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$ i $\omega_x = \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^n$.

$$\alpha = i(X)(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \theta^i(X) \theta^1 \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^i \wedge \dots \wedge \theta^n .$$

Però $\theta^1|_{\partial M} = 0$. Per tant,

$$\alpha|\partial M = \theta^1(X) \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^n = X_n \omega .$$

Això prova el teorema. ■

Part II

Unes pinzellades de física clàssica

Per a la comprensió profunda de la teoria de la relativitat que presentarem a la tercera part d'aquest llibre, a més de les nocions de geometria diferencial exposades en els capítols precedents, són necessaris uns certs coneixements de física clàssica. El principal objectiu d'aquesta segona part és fornir aquests coneixements de manera sistemàtica i a partir de zero. Alguns capítols d'aquesta part —com el 8 i el 10— no són, potser, estrictament necessaris per a la lectura posterior de la teoria de la relativitat, però d'altres —com els capítols 7, 11 i 12— resulten absolutament imprescindibles. Per exemple, no es pot entendre bé el tensor d'impulsió-energia que s'utilitza en relativitat per descriure la matèria si no es tenen els coneixements bàsics de dinàmica de fluids donats al capítol 12, ni es poden interpretar correctament els càlculs de les òrbites dels planetes en relativitat si abans no s'han fet els càlculs anàlegs des del punt de vista clàssic.

Capítol 7

Cinemàtica i dinàmica de Newton d'una partícula material

1 Cinemàtica de Newton

Newton, als Principia Mathematica, admet l'existència d'un espai absolut, immòbil, dintre del qual hi ha els cossos físics, i d'un temps absolut. Dit d'una altra manera, podem considerar que tots els cossos físics són a $\mathbf{R}^3$. L'origen i la base canònica de $\mathbf{R}^3$ se suposen immòbils. També hi ha, a $\mathbf{R}^3$, un rellotge molt precís, que marxa de manera uniforme i marca el temps. Tots els esdeveniments que tenen lloc a $\mathbf{R}^3$ es poden referir al temps marcat per aquest rellotge, que per definició marcarà el temps "oficial". Tothom, sigui on sigui, tant si es mou com si està parat, pot sincronitzar el seu rellotge amb el rellotge "oficial", de tal manera que dir que un esdeveniment ha tingut lloc en un determinat instant t té el mateix sentit per a tothom.

Si una partícula material P es mou, en cada instant t es trobarà en un punt $P(t)$ de $\mathbf{R}^3$, de manera que descriurà una corba de $\mathbf{R}^3$ parametritzada pel paràmetre temps. Si no diem res en contra, considerarem que tots els moviments de partícules materials vénen donats per corbes diferenciables tantes vegades com calgui, en general de classe C^2 . Si $P(t)$ és la corba descrita per una partícula en moviment, per a cada t , els vectors $\vec{v} = d\vec{P}/dt$ i $\vec{a} = d^2\vec{P}/dt^2$ s'anomenen respectivament velocitat i acceleració de la partícula, a l'instant t .

Direm que una partícula es mou amb *moviment uniforme* si el vector velocitat és constant, és a dir, si és el mateix vector lliure per a tot t .

Considerem una partícula mòbil, $O(t)$, en la qual ens podem imaginar que viatja un observador. Sigui $P(t)$ una altra partícula mòbil. La velocitat relativa de P respecte a O és per definició el vector $d(P(t) - O(t))/dt$, i l'acceleració relativa és $d^2(P(t) - O(t))/dt^2$. És a dir, en la definició de velocitat i acceleració

relatives, es pren com a vector posició de la partícula P un vector d'extrem P i origen l'observador mòbil O .

2 Llei fonamental de la dinàmica de Newton: “força igual a massa per acceleració”

A cada cos material se li assigna, per un procediment físic del qual després parlarem àmpliament, un nombre real positiu m , que anomenarem massa, de tal manera que es compleixi la propietat següent:

- a) Si al cos material K_1 li correspon una massa m_1 i al cos K_2 li correspon una massa m_2 , al cos reunió de K_1 i K_2 li correspon la massa $m_1 + m_2$.

Com que la física clàssica tracta de cossos no gaire petits (els fenòmens a nivell atòmic són estudiats per la física quàntica), suposarem que el procés d'assignar a cada cos la seva massa compleix també el següent axioma:

- b) Donat un cos material qualsevol, K , es pot subdividir en dos cossos K_1 i K_2 d'igual massa.

Teorema 7.1 *Si disposéssim d'un criteri C tal que, donats dos cossos materials, ens permetés determinar quin d'ells té major massa o bé si tots dos tenen la mateixa, llavors el procés d'assignar a cada cos material la seva massa quedaria unívocament determinat per les condicions a) i b) i per l'elecció d'un cos material U arbitrari que es pren com a unitat de mesura (un cos per al qual la massa sigui 1).*

Observació. El criteri C intervé en l'enunciat de b) per poder decidir quan K_1 i K_2 tenen igual massa.

DEMOSTRACIÓ. Donat un nombre enter positiu n , aplicant reiteradament b), podem descompondre el cos unitat U en cossos $U_1, U_2, \dots, U_n, \tilde{U}_n$, de masses respectives $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}$. Observem que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^n} = 1$. Sigui K un cos material arbitrari del qual volem determinar la seva massa m . Aplicant b), podem descompondre K en dues parts de masses $\frac{m}{2}$. Cada una d'aquestes parts la podem descompondre en parts de massa $\frac{m}{4}$. Així, reiterant el procés, podem dividir K en parts, cada una de les quals tingui massa inferior a la del cos unitat U . Per mesurar la massa de K , doncs, basta que sapiguem mesurar la massa de cada una d'aquestes parts. Així doncs, per mesurar la massa de qualsevol cos K , és suficient saber mesurar la massa de qualsevol cos que, en comparar-lo amb U pel criteri C , resulti tenir una massa més petita

que U . Sigui K , doncs, un tal cos. Sigui m la seva massa que volem mesurar. Expressada en el sistema de numeració de base 2, serà un nombre de la forma

$$m = 0, a_1 a_2 \dots$$

amb els $a_1, a_2 \dots$ zeros o bé uns. Tot seguit descriurem com es poden determinar $a_1, a_2 \dots$.

Comparem les masses de K i U_1 utilitzant el criteri C . Pot succeir una d'aquestes coses:

- 1) La massa de K és menor que la de U_1 . Com que U_1 té massa $1/2$, que correspon al nombre $0,1$ en base 2, haurem de posar $a_1 = 0$. Continuarem llavors el procés per determinar $a_2, a_3 \dots$
- 2) La massa de K és igual que la de U_1 . En aquest cas, posem $a_1 = 1$ i tots els restants $a_2, a_3 \dots$ iguals a zero.
- 3) La massa de K és major que la de U_1 . En aquest cas, posem $a_1 = 1$ i continuem el procés per determinar $a_2, a_3 \dots$

En els casos 1) i 3) anomenem A el cos de menor massa dels dos cossos K i U_1 i anomenem B l'altre. Ajuntem ara U_2 i A i comparem pel criteri C $A \cup U_2$ amb B . Pot passar que:

- i) la massa de $A \cup U_2$ sigui menor que la de B ;
- ii) la massa de $A \cup U_2$ sigui igual a la de B ;
- iii) la massa de $A \cup U_2$ sigui major que la de B .

En el cas i) posem $a_2 = 0$ i continuem el procés per determinar $a_3, a_4 \dots$. En el cas ii) posem $a_2 = 1$, i tots els restants $a_3, a_4 \dots$ iguals a zero. En el cas iii) posem $a_2 = 1$, i continuem el procés per determinar $a_3, a_4 \dots$.

En els casos i) i iii) tornem a anomenar A el cos de massa menor dels dos cossos $A \cup U_2$ i B i tornem a anomenar B l'altre. Ajuntem U_3 i A i tornem a repetir el procés per determinar a_3 . Reiterant el procés determinarem $a_4, a_5 \dots$. Si en cada cas dels que hem analitzat procedíssim d'una altra manera, deixarien de complir-se les condicions del teorema. Per tant, el nombre m està *unívocament* determinat. ■

Diversos criteris físics “C” per comparar masses. La definició de massa depèn fonamentalment del criteri C utilitzat en el teorema anterior per comparar masses. Aquell teorema no és altra cosa que un resultat general de “mesura”.

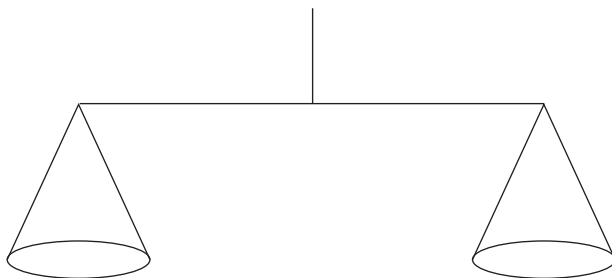


Figura 7.1

Si prenguéssim com a criteri C que a K_1 se li ha d'assignar massa més gran o igual que a K_2 quan el volum de K_1 és més gran o igual que el de K_2 , el teorema anterior ens donaria el volum, no la massa.

Ara descriurem un dels diversos criteris C que es poden utilitzar en el procés d'assignar la seva massa a cada cos material. Direm que una regió de l'espai és inercial si qualsevol cos deixat lliurement en aquesta regió o bé està parat o bé descriu una trajectòria rectilínia amb moviment uniforme, mentre és en aquesta regió. Se suposa que a l'espai podem trobar una regió inercial. Donats dos cossos K_1 i K_2 , les masses dels quals es volen comparar per C , es porten a una regió inercial de l'espai i es tiren un contra l'altre de manera que el moviment dels dos tingui lloc en una mateixa recta i que col·lideixin frontalment. El criteri C diria que s'ha d'assignar major massa al cos que compleix que el mòdul de la diferència de velocitats (cada velocitat és un vector) abans i després del xoc sigui més petit. Dit d'una altra manera, s'ha d'assignar major massa al cos que hagi experimentat menor variació de velocitat.

Un altre criteri diferent C' seria comparar les masses de dos cossos materials mitjançant una balança de braços com la que indica la figura 7.1. Per a això hauríem de portar els dos cossos dels quals volem comparar les masses a qualsevol regió de la Terra (o del nostre sistema solar) que no fos inercial.

És un fet remarcable de la física, comprovat experimentalment, que els criteris C i C' (ben diferents, a priori) porten al mateix resultat. Els dos defineixen, doncs, la “mateixa” massa.

Se sobreentén que la massa associada a un cos pel teorema 7.1 i un qualsevol dels dos criteris C o C' no depèn del moviment d'aquest cos, és a dir, és la mateixa tant si el cos està parat com si es mou.

Força. Quan una partícula material que està en repòs, o que es mou amb moviment uniforme, sofreix una acceleració, es diu que sobre ella ha actuat una força, i es defineix aquesta força com el vector $m\vec{a}$, on $\vec{a}$ és el vector acceleració. Aquesta definició, tal com l'hem formulat, conté el principi d'inèrcia segons el qual una partícula en repòs o moviment uniforme es manté en el mateix estat si no actua cap força sobre ella.

3 Quantitat de moviment, energia cinètica, potència, treball

Sigui P una partícula de massa m que es mou descrivint una corba $P(t)$. S'anomena quantitat de moviment de la partícula, a l'instant t , el vector $\vec{\mathcal{P}} = m\vec{v}$, on $\vec{v}$ és la velocitat de la partícula en aquest instant. La força $F(t)$ que actua sobre la partícula P a l'instant t és $\vec{F} = m\vec{a} = m d\vec{v}/dt = d\vec{\mathcal{P}}/dt$. Per tant, la força és la variació de quantitat de moviment. Si sobre una partícula no actua cap força, la quantitat de moviment roman constant.

S'anomena energia cinètica de la partícula, a l'instant t , l'escalar $\frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2$. S'anomena potència de la partícula, a l'instant t , el producte escalar $\vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$, on $\vec{F}(t)$ és la força que actua sobre la partícula en aquest instant. S'anomena treball entre els instants t_0 i t_1 la integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt.$$

Es té

$$\text{treball} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = m \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} \left[m\vec{v} \cdot \vec{v} \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Dit d'una altra manera, el treball entre t_0 i t_1 coincideix amb la variació d'energia cinètica entre aquests dos instants.

Si un cos material K està format per n partícules, $P_1 \dots P_n$, s'anomena quantitat de moviment de K la suma de les quantitats de moviment de cada una d'elles. Anàlogament, s'anomenen energia cinètica, potència i treball les sumes d'energies cinètiques, potències i treballs de cada partícula. Si sobre un sistema de partícules no actua cap força, la quantitat de moviment roman constant.

El pas a cossos continus es pot fer de manera trivial.

4 Forces que deriven d'un potencial

Sigui U un obert connex de $\mathbf{R}^3$. Suposem que per a cada $p \in U$, cada escalar $m \in \mathbf{R}^+$ i cada instant de temps t , tenim un vector $\vec{F}(m, p, t)$. Suposem, a més, que cada partícula de massa m deixada en repòs en el punt p , a l'instant t , sofreix una acceleració instantània

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}(m, p, t).$$

Llavors direm que a U tenim un camp de forces. Direm que aquest camp deriva d'un potencial, si no depèn de t i, a més, si existeix una funció diferenciable $V(m, p)$ sobre U , anomenada potencial, funció del punt $p = (x, y, z)$ i de m , tal que per a qualsevol $p_0 \in U$ es té

$$\vec{F}(m, p_0) = -\overrightarrow{\text{grad}}_{p_0} V,$$

on

$$\overrightarrow{\text{grad}}_{p_0} V = \left(\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{p_0}, \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{p_0}, \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_{p_0} \right).$$

Per tal de caracteritzar els camps de forces que deriven d'un potencial, abans hem de definir els conceptes de trajectòria virtual i treball virtual.

Una trajectòria virtual entre dos punts p_1 i p_2 de $\mathbf{R}^3$ no és altra cosa que una corba parametritzada de $\mathbf{R}^3$, de classe C^2 a trossos, que enllaci p_1 i p_2 . Ara explicarem el perquè de l'adjectiu "virtual".

El moviment d'una partícula material queda determinat coneixent la força que actua sobre ella en cada instant de temps i la velocitat inicial. Suposem, per exemple, que la partícula es mou en un camp de forces conegut. Llavors, per a cada p_1 i cada vector $\vec{v}_1$, la trajectòria d'una partícula material que surt de p_1 amb velocitat $\vec{v}_1$ queda determinada. Aquesta trajectòria seria una trajectòria real. Entre les corbes que surten de p_1 , molt poques poden ser recorregudes per partícules materials seguint la llei del moviment, $\vec{F} = m\vec{a}$. Per això s'anomena trajectòria virtual qualsevol corba que surti de p_1 , independentment que pugui o no ser recorreguda per una partícula material d'acord amb la llei del moviment.

Sigui U un obert connex de $\mathbf{R}^3$ on hi ha un camp de forces $\vec{F}(m, p, t)$. Sigui p_1 i p_2 dos punts de U . Sigui $C(t)$ una trajectòria virtual que uneixi p_1 i p_2 . Suposem que $C(t_1) = p_1$, $C(t_2) = p_2$. S'anomena treball virtual d'una partícula de massa m , al llarg de $C(t)$, entre p_1 i p_2 , la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(m, C(t), t) \cdot \vec{C}'(t) dt.$$

El treball virtual és, doncs, el treball associat a la partícula de massa m , si aquesta partícula seguís la trajectòria $C(t)$.

La demostració del següent teorema és un exercici elemental.

Teorema 7.2 *Sigui U un obert connex de $\mathbf{R}^3$ i $\vec{F}(m, p)$ un camp de forces sobre U que no depèn de t . Condició necessària i suficient perquè $\vec{F}$ derivi d'un potencial és que el treball virtual entre dos punts qualssevol, p_1 i p_2 de U , al llarg de qualsevol trajectòria virtual que els uneixi, no depengui de la trajectòria virtual.*

Si $\vec{F}$ és un camp vectorial en una regió de $\mathbf{R}^3$, de components (F^1, F^2, F^3) , s'anomena rotacional de F el camp vectorial

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z}, \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x}, \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right).$$

Es desprèn directament de les definicions que si un camp de forces $\vec{F}(m, p)$ deriva d'un potencial, llavors $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = 0$. No és tan immediat com això veure que si la regió U on tenim el camp de forces $\vec{F}$ és simplement connexa i si $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = 0$, llavors F , sobre U , deriva d'un potencial. No obstant això, ho deixem com a exercici.

5 Conservació de l'energia

Imaginem-nos una partícula material de massa m que es mou en una regió U de $\mathbf{R}^3$ pels efectes d'un camp de forces, $\vec{F}$, sobre U . Suposem, a més, que aquest camp de forces deriva d'un potencial V . Sigui $P(t)$ la trajectòria de la partícula. El treball realitzat entre dos instants de temps t_0 i t_1 serà

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} dt &= - \int_{t_0}^{t_1} \vec{\text{grad}} V \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} V(P(t)) dt = \\ &= V(P(t_0)) - V(P(t_1)). \end{aligned}$$

Com que el treball realitzat era també igual a la variació d'energia cinètica, anomenant $E_c(t)$ l'energia cinètica a l'instant t , es té

$$E_c(t_1) - E_c(t_0) = V(P(t_0)) - V(P(t_1)).$$

O sigui,

$$E_c(t_1) + V(P(t_1)) = E_c(t_0) + V(P(t_0)).$$

Això vol dir que la suma d'energia cinètica i potencial és independent de l'instant de temps considerat, és a dir, és una constant. Això es coneix com el teorema de conservació de l'energia.

Capítol 8

Equacions de Lagrange

1 Sistemes de partícules amb lligadures holònomes que no depenen del temps

Suposem que tenim un cos constituït per n partícules materials, $P_1 \dots P_n$, de masses respectives $m_1, \dots, m_n$. Anomenarem (x_i, y_i, z_i) les coordenades corresponents a la posició de la partícula P_i . Siguin $f_1 \dots f_s$ s funcions de les $3n$ coordenades $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$. Suposem que les partícules $P_1 \dots P_n$, en qualsevol moviment que realitzin, sempre compleixen les relacions

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (8.1)$$

per a $j = 1 \dots s$. Llavors es diu que les partícules $P_1 \dots P_n$ estan lligades pels vincles o lligadures (8.1). Les lligadures d'aquesta mena s'anomenen, a la literatura, “ligadures holònomes que no depenen del temps”, per tal de distingir-les d'altres lligadures més complicades que poden existir, però que nosaltres deixarem de banda. Per exemple, si les funcions f_j depenguessin, a més, del temps, les lligadures s'anomenarien holònomes depenents del temps. Existeixen lligadures més complicades que es diuen “no holònomes” en què les f_j depenen no solament de les posicions de les partícules i del temps, sinó també de les velocitats de les partícules. De totes maneres, nosaltres, quan parlem de “ligadures”, sempre voldrem dir “ligadures holònomes independents del temps”.

Exemple 1. Siguin P_1 i P_2 dues partícules unides per una barra rígida sense massa, de longitud l . En qualsevol moviment s'ha de conservar la distància. Per tant, s'ha de complir la condició de lligadura

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2.$$

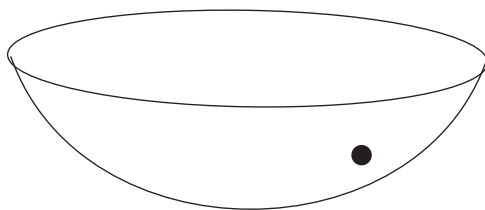


Figura 8.1

Naturalment, això és una idealització, doncs no hi pot haver una barra rígida sense massa, però de vegades sí que pot passar que la massa de la barra sigui menyspreable en comparació amb la massa de P_1 i P_2 .

Exemple 2. Considerem un punt material P que només es pot moure sobre una porció d'esfera de centre l'origen de coordenades (figura 8.1). En tot moment les coordenades (x, y, z) del punt estaran lligades per

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Tornant a la situació general de les n partícules $P_1 \dots P_n$ lligades per (8.1), anomenem, per comoditat, $x^1 \dots x^{3n}$ les $3n$ coordenades $x_1, y_1, z_1 \dots x_n, y_n, z_n$. Suposarem des d'ara que $s < 3n$, que les funcions f_j són diferenciables i que per a cada $x_0 \in \mathbf{R}^{3n}$ que compleixi $f_j(x_0) = 0$ per a tot j , la matriu jacobiana

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x^i} \right)_{x_0}$$

té rang s . Amb aquestes condicions, les equacions (8.1) defineixen una subvarietat diferenciable, M , de $\mathbf{R}^{3n}$, de dimensió $r = 3n - s$, que anomenarem varietat de les posicions del sistema, ja que cada punt de M correspon a una posició de cada una de les partícules, respectant les lligadures. Cada $x_0 \in M$ té un entorn en el qual M es pot expressar de manera paramètrica

$$\begin{cases} x^1 = & x^1(q_1 \dots q_r) \\ \dots & \dots \\ x^{3n} = & x^{3n}(q_1 \dots q_r). \end{cases}$$

Els paràmetres $q_1 \dots q_r$, que són qualssevol, se solen anomenar coordenades generalitzades del sistema. La dimensió r de M és (per definició) el nombre

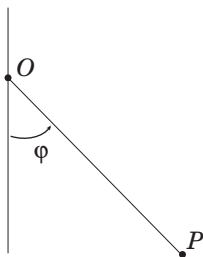


Figura 8.2

de graus de llibertat del sistema. A continuació veurem diversos exemples de coordenades generalitzades, per tal de fixar les idees.

Exemple 3 (El pèndol simple). Sigui P una partícula de massa m , a $\mathbf{R}^2$, subjecta a l'extrem d'una barra sense massa, de longitud l , que està fixada per l'altre extrem a un punt fix O (figura 8.2). Si prenem O com a origen de coordenades i anomenem x, y les dues coordenades de P , la posició de P queda determinada per l'angle φ que forma la barra amb l'eix de les y . Podem prendre φ com a coordenada generalitzada. Les coordenades de P s'expressaran

$$\begin{cases} x = l \sin \varphi \\ y = -l \cos \varphi. \end{cases}$$

En qualsevol moviment, l'angle φ serà funció del temps, i la posició de P vindrà donada en funció del temps per

$$\begin{cases} x(t) = l \sin \varphi(t) \\ y(t) = -l \cos \varphi(t). \end{cases}$$

Exemple 4 (El doble pèndol). Considerem el pèndol de l'exemple anterior, i pengem del punt P una altra barra sense massa. A l'altre extrem de la barra, de longitud l' , posem-hi una partícula, P' , de massa m' . És clar que aquest sistema tindrà dos graus de llibertat i que els angles φ i ψ de la figura 8.3 determinen la posició del sistema, que estarà constituït pels dos punts P i P' . Si anomenem (x, y) les coordenades de P i (x', y') les de P' , es tindrà

$$\begin{cases} x = l \sin \varphi \\ y = -l \cos \varphi \\ x' = l \sin \varphi + l' \sin \psi \\ y' = -l \cos \varphi - l' \cos \psi. \end{cases}$$

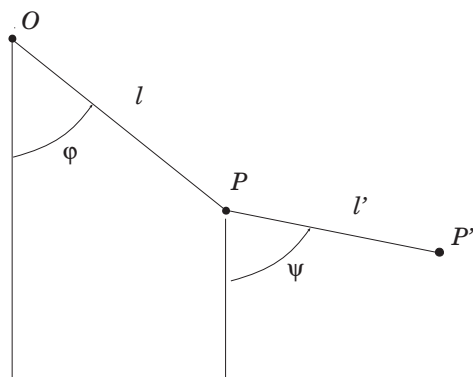


Figura 8.3

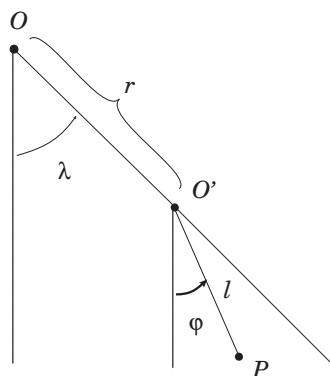


Figura 8.4

Exemple 5 (Pèndol amb punt de suspensió mòbil). Considerem el pèndol de l'exemple 3, però suposem que el punt de suspensió, O' , de massa m' , es pot desplaçar al llarg d'una recta inclinada, tal com indica la figura 8.4. Si (x, y) són les coordenades de P i (x', y') les de O' tindrem

$$\begin{cases} x' = r \sin \alpha \\ y' = -r \cos \alpha \\ x = r \sin \alpha + l \sin \varphi \\ y = -r \cos \alpha - l \cos \varphi. \end{cases}$$

α i l són constants, mentre que r i φ varien. El sistema té 2 graus de llibertat.

2 Velocitats virtuals del sistema: fibrat tangent

Siguin $P_1 \dots P_n$ n partícules materials sotmeses a lligadures, com a l'apartat anterior. Per a cada i , $1 \leq i \leq n$, designem per π_i la projecció canònica

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{3n} & \xrightarrow{\pi_i} & \mathbf{R}^3 \\ (x_1, y_1, z_1 \dots x_n, y_n, z_n) & \mapsto & (x_i, y_i, z_i). \end{array}$$

Sigui M la varietat de posicions del sistema. Observem que per a cada $p \in M$, $p_i = \pi_i(p)$ correspon a la posició p_i de la partícula P_i . No tots els moviments de les partícules P_i són compatibles amb les lligadures. Si pensem que cada partícula P_i es mou, i que en el seu moviment descriu una corba $p_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$, només seran compatibles amb les lligadures les trajectòries $p_i(t)$ tals que $p(t) = (p_1(t) \dots p_n(t))$ sigui de M per a tot t . Anomenarem velocitat virtual del sistema en el punt p qualsevol $v \in T_p(M)$. Anomenarem velocitat virtual de P_i corresponent a $v \in T_p(M)$ el vector $v_i = (\pi_i)_* v$. Veiem, doncs, que donada una velocitat virtual del sistema, $v \in T_p(M)$, $v = (v_1 \dots v_n)$, les v_i corresponen a velocitats de les P_i de moviments compatibles amb les lligadures.

Dotem el conjunt $T(M)$ de totes les velocitats virtuals del sistema corresponents a tots els punts $q \in M$ d'una estructura de varietat diferenciable de dimensió $2r$. El conjunt $T(M)$ és la reunió disjunta $\cup_{q \in M} T_q(M)$. Sigui π la projecció $T(M) \rightarrow M$ que a cada v de $T_q(M)$ li assigna el punt $q \in M$ en el qual v és el vector tangent. Sigui $(U, q^1 \dots q^r)$ una carta local de M . Donat un $v \in T_q(M)$ amb $q \in U$,

$$v = \sum v^i \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right)_q.$$

Sigui φ l'aplicació de $\pi^{-1}(U)$ en $\mathbf{R}^{2r}$ que a cada $v \in T_q(M)$ amb $q \in U$ li assigna $(q^1 \dots q^r, v^1 \dots v^r)$, on $(q^1 \dots q^r)$ són les coordenades de q i $(v^1 \dots v^r)$

les components de v en la base $\{\partial/\partial q^i\}$. Quan $(U, q^1 \dots q^r)$ recorre totes les cartes locals d'un atlas de M , els parells $(\pi^{-1}(U), \varphi)$ constitueixen una família que anomenarem $\mathcal{F}$. Dotem $T(M)$ de la topologia que consisteix a anomenar obert tot conjunt A tal que $\varphi(A \cap \pi^{-1}(U))$ és obert de $\mathbf{R}^{2r}$ per a qualsevol parell $(\pi^{-1}(U), \varphi)$ de $\mathcal{F}$. Si $(U, q^1 \dots q^r)$ i $(V, q'^1 \dots q'^r)$ són dues cartes locals de M amb $U \cap V \neq \emptyset$, a $U \cap V$ es tindrà

$$\begin{cases} q'^i &= q'^i(q^1 \dots q^r) \\ \frac{\partial}{\partial q^i} &= \sum_j \frac{\partial q'^j}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial q'^j}. \end{cases}$$

Sigui $v \in T_q(M)$, amb $q \in U \cap V$. Si posem $v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial q^i} = \sum_j v'^j \frac{\partial}{\partial q'^j}$, òbviament es tindrà

$$v'^j = \sum_i v^i \frac{\partial q'^j}{\partial q^i}.$$

Si $(\pi^{-1}(U), \varphi)$ i $(\pi^{-1}(V), \psi)$ són els dos parells de $\mathcal{F}$ corresponents a les cartes locals $(U, q^1 \dots q^r)$ i $(V, q'^1 \dots q'^r)$, l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \varphi(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) & \xrightarrow{\psi \circ \varphi^{-1}} & \psi(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) \\ (q^1 \dots q^r, v^1 \dots v^r) & \longmapsto & (q'^1 \dots q'^r, v'^1 \dots v'^r) \end{array}$$

vindrà donada per

$$\begin{cases} q'^j &= q'^j(q^1 \dots q^r) \\ v'^j &= \sum_i v^i \frac{\partial q'^j}{\partial q^i}. \end{cases}$$

Això prova que $\psi \circ \varphi^{-1}$ és diferenciable, i per tant els $\{(\pi^{-1}(U), \varphi)\}$ constitueixen un atlas de $T(M)$. $T(M)$ s'anomena el fibrat tangent de M . Les coordenades $v^1 \dots v^r$ se solen designar per $\dot{q}^1 \dots \dot{q}^r$. Així doncs, escriurem $(q^1 \dots q^r, \dot{q}^1 \dots \dot{q}^r)$ com les $2r$ coordenades sobre $\pi^{-1}(U)$.

3 Forces de lligadura i principi de les potències virtuals

Siguin $P_1 \dots P_n$ n partícules materials sotmeses a lligadures, com a l'apartat anterior. Si sobre cada P_i actua una força F_i , donada una velocitat virtual

$\vec{v} = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)$, anomenarem potència virtual del sistema, corresponent a les forces $\vec{F}_i$ i a la velocitat virtual $\vec{v}$, l'escalar $\sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$, on cada $\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$ vol dir el producte escalar a $\mathbf{R}^3$. Suposem ara que el sistema que considerem és en una regió U de $\mathbf{R}^3$ on actua un camp de forces $\vec{F}(m, p, t)$, i suposem que el sistema es mou pels efectes d'aquest camp de forces. És obvi que, en la majoria de casos, les partícules P_i del sistema no es mouran com si totes fossin independents. Si fos així cada partícula P_i es mouria segons la llei $\vec{F}(m_i, p_i, t) = m_i d^2 \vec{p}_i / dt^2$, on p_i indica la posició de P_i , i m_i la seva massa. Llavors, les posicions $p_i(t)$ que obtindríem al llarg del temps no complirien, en la majoria dels casos, les condicions de lligadura. Per tant, és obvi que cada partícula no es mou com si estigués sola. Sigui $\vec{a}_i(t)$ l'acceleració real que sofreix la partícula P_i a l'instant t . Sigui $\vec{\phi}_i = m_i \vec{a}_i - \vec{F}(m_i, p_i, t)$. La força $\vec{\phi}_i$ es diu força de lligadura que actua sobre P_i . Així doncs, la força de lligadura és la força que s'ha de sumar a la força exterior $\vec{F}$ per produir l'acceleració real a la partícula, en comptes de l'acceleració teòrica $\vec{F}/m_i$ que li produiria el camp de forces si la partícula estigués sola.

Acceptarem el següent axioma, conegut com el principi de les potències virtuals, o també dels treballs virtuals, que va ser formulat per D'Alembert.

Axioma. *Per a qualsevol velocitat virtual $\vec{v}$ del sistema, les forces de lligadura ϕ_i són tals que la seva potència virtual corresponent a $\vec{v}$ és nul·la. És a dir, $\sum \vec{\phi}_i \cdot \vec{v}_i = 0$.*

El principi de les potències virtuals és una forma molt elaborada i molt còmoda del conegut principi de Newton de l'acció i la reacció.

Els axiomes no es poden demostrar, però sí justificar intuïtivament. Per justificar aquest axioma, calcularem, basant-nos en la intuïció, la potència virtual de les forces de lligadura en els exemples 3, 4 i 5, i veurem que s'anul·la. Com que, basant-nos en la intuïció, hem d'acceptar l'axioma en aquests exemples, i com que l'argumentació que farem en aquests casos concrets es pot trasplantar a situacions cada vegada més complicades, acceptarem l'axioma en general.

Exemple del pèndol. Considerem el pèndol de l'exemple 3. La intuïció ens diu que la força de lligadura que actua sobre el punt P ha de tenir la direcció del segment PO , ja que el punt P està lligat al punt fix O a través de PO . Com que qualsevol velocitat virtual del sistema (i, per tant, compatible amb les lligadures) és tangent al cercle que descriu P en el seu moviment (i, per tant, normal a PO), el producte escalar de la força de lligadura per qualsevol velocitat virtual serà nul. Veiem, doncs, que es compleix l'axioma. Encara que això era precisament el que volíem veure, val la pena analitzar amb una mica més de profunditat aquest exemple, perquè en aquest cas podem determinar

fàcilment les forces de lligadura.

Suposem, primerament, que el pèndol evoluciona sense que actui cap força exterior sobre ell (pel simple efecte d'una velocitat inicial que hem comunicat al punt P). Anomenarem $\vec{r}$ el vector posició de P , que serà funció de l'angle φ :

$$\vec{r} = (l \sin \varphi, -l \cos \varphi).$$

Com que φ varia amb el temps, $\vec{r}$ també. Es té

$$\vec{r}(t) = (l \sin \varphi(t), -l \cos \varphi(t)).$$

Derivant respecte al temps, tindrem

$$\dot{\vec{r}} = (l\dot{\varphi} \cos \varphi, l\dot{\varphi} \sin \varphi).$$

Anomenem $\vec{T}(t)$ el vector tangent unitari

$$\vec{T}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|} = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t)).$$

Anomenem $\vec{N}(t)$ el vector normal unitari que mira cap enfora,

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|} = (\sin \varphi(t), -\cos \varphi(t)).$$

Tindrem $\dot{\vec{r}} = l\dot{\varphi}\vec{T}$. Tornant a derivar,

$$\ddot{\vec{r}} = l\ddot{\varphi}\vec{T} + \dot{\varphi}\frac{d\vec{T}}{dt} = l\ddot{\varphi}\vec{T} - l\dot{\varphi}^2\vec{N}.$$

La força de lligadura que actua sobre P haurà de ser $m\ddot{\vec{r}}$ (per definició de força de lligadura, ja que no hi ha forces exteriors). Ara bé, com que hem dit que la força de lligadura ha de tenir la direcció de PO , la part tangent de $m\ddot{\vec{r}}$ haurà de ser zero. Per tant, $\ddot{\varphi} = 0$, o sigui, $\dot{\varphi} = \text{constant} = \text{velocitat angular inicial}$. La força de lligadura és, doncs, $m\ddot{\vec{r}} = -ml\dot{\varphi}^2\vec{N}$ (força centrípeta).

Si suposem ara que el pèndol es mou sota l'acció d'un camp de forces $\vec{F}$, en cada instant podem descompondre $\vec{F}$ en part normal al cercle que descriu P , $\vec{F}_1$, i part tangent, $\vec{F}_2$ (figura 8.5). O sigui, $F = F_1 + F_2$. Si anomenem $\vec{\phi}$ la força de lligadura que actua sobre P , tindrem, per definició de força de lligadura,

$$\vec{F} + \vec{\phi} = m\ddot{\vec{r}} = ml\ddot{\varphi}\vec{T} - ml\dot{\varphi}^2\vec{N}.$$

ϕ haurà de ser normal. La component normal de la identitat anterior dirà

$$F_1 + \phi = -ml\dot{\varphi}^2N,$$

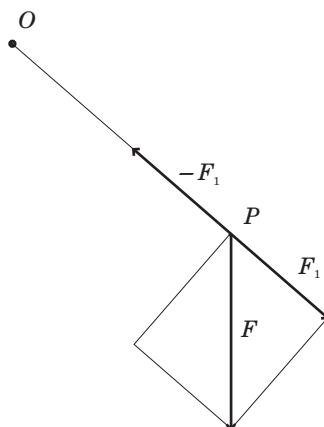


Figura 8.5

d'on $\phi = -ml\dot{\phi}^2 N - F_1$. La força de lligadura és igual a la força centrípeta més una força $(-F_1)$ igual i de sentit contrari a la component normal de la força exterior F .

Exemple del doble pèndol. Amb les notacions de l'exemple 4, suposem que sobre P' actua una força $\vec{F}'$ i que sobre P actua una força $\vec{F}$ (figura 8.6). El moviment de P' repercutirà sobre el de P , i el de P sobre el moviment de P' . Sobre P' actuarà la força de lligadura $\phi_{PP'}$, que és la força que P exerceix sobre P' . Sobre P actuen dues forces de lligadura, $\phi_{P'P}$, que és la força que P' exerceix sobre P , i ϕ_{OP} , la que O exerceix sobre P . Ara bé, Newton va postular que la força que P' exerceix sobre P és igual i de sentit contrari que la que P exerceix sobre P' ($\phi_{P'P} = -\phi_{PP'}$). La determinació exacta de les forces de lligadura que hem fet en l'exemple anterior aquí resulta bastant més complicada. No obstant això, només amb les consideracions rudimentàries que hem fet sobre les forces de lligadura, podrem comprovar fàcilment, aquí també, el compliment de l'axioma de les potències virtuals. Una velocitat virtual del sistema vindrà donada per un vector tangent a una petita corba de M ,

$(\varphi(s), \psi(s))$.

$$\begin{cases} x(s) = l \sin \varphi(s) \\ y(s) = -l \cos \varphi(s) \\ x'(s) = l \sin \varphi(s) + l' \sin \psi(s) \\ y'(s) = -l \cos \varphi(s) - l' \cos \psi(s). \end{cases}$$

Derivant respecte al paràmetre s , tindrem

$$\begin{cases} \dot{x} = l\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{y} = l\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{x}' = l\dot{\varphi} \cos \varphi + l'\dot{\psi} \cos \psi = \dot{x} + l'\dot{\psi} \cos \psi \\ \dot{y}' = \dot{y} + l'\dot{\psi} \sin \psi. \end{cases} \quad (8.2)$$

Així doncs, una velocitat virtual $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ serà un parell de vectors $\vec{v}_1 = (\dot{x}, \dot{y})$ i $\vec{v}_2 = (\dot{x}', \dot{y}')$, on $\vec{v}_1$, segons (8.2), serà sempre perpendicular a la barra $\overline{OP}$, mentre que $\vec{v}_2$, també segons (8.2), serà de la forma $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{w}$, amb $\vec{w}$ perpendicular a $\overline{PP'}$. La potència virtual de les forces de lligadura corresponent a la velocitat virtual $\vec{v}$, serà, doncs,

$$(\vec{\phi}_{P'P} + \vec{\phi}_{OP}) \cdot \vec{v}_1 + \vec{\phi}_{PP'} \cdot \vec{v}_2.$$

Com que ϕ_{OP} i v_1 són perpendiculars, la potència virtual anterior serà

$$\phi_{P'P} \cdot v_1 + \phi_{PP'} \cdot v_2 = \phi_{P'P} \cdot v_1 + \phi_{PP'} \cdot (v_1 + w) = (\phi_{P'P} + \phi_{PP'}) \cdot v_2 = 0,$$

ja que $\phi_{P'P} = -\phi_{PP'}$.

Aquí hem utilitzat el postulat de Newton segons el qual la força de lligadura que exerceix P' sobre P és igual i de sentit contrari a la que exerceix P sobre P' . Per tal de convèncer-nos d'això, estudiem un exemple més senzill que posi en evidència aquest fet.

Exemple de la barra que cau verticalment. Suposem dos punts P i P' , a $\mathbf{R}^2$, de masses respectives m i m' , units per una barra rígida sense massa. Suposem que posem la barra en posició vertical i la deixem caure lliurement, sense velocitat inicial, sota l'acció del camp de forces $\vec{F}(m, x, y) = -mg(\vec{0}, \vec{1})$, on g és una constant (camp de forces de la gravetat) i $(\vec{0}, \vec{1})$ indica el vector de $\mathbf{R}^2$ de components 0 i 1. La intuïció ens diu que tot el sistema caurà amb una acceleració $\vec{a}$, la mateixa per a P i P' , tal que

$$F_P + F_{P'} = (m + m')a,$$

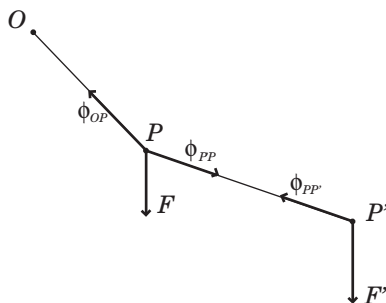


Figura 8.6

on F_P i $F_{P'}$ són respectivament les forces exteriors que actuen sobre P i P' . La força de lligadura que actua sobre P , ϕ_P , haurà de complir

$$\begin{aligned} F_P + \phi_P &= ma = (\text{substituint el valor de } a \text{ obtingut en la fórmula} \\ \text{anterior}) &= m \frac{F_P + F_{P'}}{m + m'} . \end{aligned}$$

D'aquí obtenim

$$\phi_P = -\frac{m'}{m + m'} F_P + \frac{m}{m + m'} F_{P'} .$$

Pel mateix raonament,

$$\phi_{P'} = -\frac{m}{m + m'} F_{P'} + \frac{m'}{m + m'} F_P .$$

Veiem que són iguals i de sentit contrari. Aquí també es compleix el principi de potències virtuals. En efecte, si (x, y) són les coordenades de P i (x', y') les de P' , com que

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = \text{constant} ,$$

si $(x(s), y(s), x'(s), y'(s))$ és una trajectòria virtual del sistema (compatible amb les lligadures), derivant la condició anterior respecte a s tindrem

$$2(x - x')(\dot{x} - \dot{x}') + 2(y - y')(\dot{y} - \dot{y}') = 0 .$$

Si posem $v_P = (\dot{x}, \dot{y})$, velocitat virtual corresponent a P , i $v_{P'} = (\dot{x}', \dot{y}')$, la condició anterior s'escriu, en forma vectorial,

$$(\vec{P} - \vec{P}') \cdot (\vec{v}_P - \vec{v}_{P'}) = 0 .$$

Ara bé, com que la força de lligadura ϕ_P té la direcció de $P - P'$, serà de la forma $\lambda(P - P')$. Com que $\phi_{P'} = -\phi_P$, es tindrà

$$\begin{aligned}\text{potència virtual} &= \phi_P \cdot v_P + \phi_{P'} \cdot v_{P'} = \lambda(P - P') \cdot v_P - \lambda(P - P') \cdot v_{P'} \\ &= \lambda(P - P')(v_P - v_{P'}) = 0.\end{aligned}$$

Exercici. Comproveu el principi de les potències virtuals en el pèndol de l'exemple 5.

4 Equacions del moviment a la varietat M

Considerem un sistema de n partícules, $P_1 \dots P_n$, sotmès a lligadures. Volem establir les equacions diferencials del moviment d'aquest sistema. Designem per $\vec{p}_i(t)$ la posició de la partícula P_i a l'instant t . Si no hi hagués lligadures, les equacions del moviment es reduirien a

$$\vec{F}_i = m_i \frac{d^2 \vec{p}_i}{dt^2}, \quad (8.3)$$

per a $i = 1 \dots n$, on F_i és la força que actua sobre P_i . Si hi ha lligadures, segons les definicions de l'apartat anterior les equacions del moviment seran

$$F_i + \phi_i = m_i \frac{d^2 p_i(t)}{dt^2}. \quad (8.4)$$

El problema rau en el fet que és molt complicat determinar en cada cas les forces de lligadura ϕ_i . Utilitzant el principi de les potències virtuals, donarem unes equacions equivalents a (8.4), on no hi figurin les forces ϕ_i . Sigui $x(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ la trajectòria que segueix realment el sistema. Tindrem

$$\dot{x}(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t)), \quad \text{on } v_i = \frac{dp_i}{dt}.$$

Fixem un $t = t_0$. Sigui w un vector qualsevol tangent a M en el punt $x(t_0)$. Com que $M \subset \mathbf{R}^{3n}$, w serà de la forma $w = (w_1 \dots w_n)$, amb els w_i vectors de $\mathbf{R}^3$. Multipliquem escalarment l'equació (8.4) per w_i , i sumem respecte a i . Pel principi de les potències virtuals, tindrem

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{w}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \vec{p}_i}{dt^2} \cdot \vec{w}_i. \quad (8.5)$$

Per tal d'interpretar d'una altra manera l'equació (8.5), considerarem a $\mathbf{R}^{3n}$ dos productes escalars diferents. D'una banda, l'euclidià, g , i de l'altra g_T , definit per

$$g_T(\vec{u}, \vec{w}) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{u}_i \cdot \vec{w}_i,$$

on

$$\vec{u} = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$$

$$\vec{w} = (\vec{w}_1 \dots \vec{w}_n)$$

i m_i és la massa de P_i . Com que g_T conté les masses, depèn naturalment del sistema de partícules que considerem. Si posem

$$\vec{F} = (\vec{F}_1 \dots \vec{F}_n),$$

on $\vec{F}_i$ és la força que actua sobre P_i , l'equació (8.5) s'escriu

$$g(\vec{F}, \vec{w}) = g_T(\ddot{x}(t), w). \quad (8.6)$$

Ara bé, $\ddot{x} = \nabla_{\dot{x}} \dot{x}$, on ∇ indica la derivada covariant usual de $\mathbf{R}^{3n}$. Com que la mètrica g_T és la mateixa en tots els punts de $\mathbf{R}^{3n}$ (no depèn del punt), la derivada covariant associada a g_T també serà ∇ . Sigui $\bar{\nabla}$ la derivada covariant sobre M associada a g_T . Com que

$$\nabla_{\dot{x}} \dot{x} = \bar{\nabla}_{\dot{x}} \dot{x} + \text{part normal a } M \text{ (respecte a } g_T),$$

$$g_T(\ddot{x}, w) = g_T(\nabla_{\dot{x}} \dot{x}, w) = g_T(\bar{\nabla}_{\dot{x}} \dot{x}, w),$$

ja que w és tangent a M . Així doncs, (8.6) s'escriu

$$g(F, w) = g_T(\bar{\nabla}_{\dot{x}} \dot{x}, w). \quad (8.7)$$

Sigui f el vector de $T_{x(t_0)}(M)$ tal que

$$g_T(f, w) = g(F, w) \quad \forall w \in T_{x(t_0)}(M).$$

Llavors (8.7) s'escriu

$$g_T(f, w) = g_T(\bar{\nabla}_{\dot{x}} \dot{x}, w) \quad \forall w.$$

Per tant,

$$f = \bar{\nabla}_{\dot{x}} \dot{x}.$$

f s'anomena força generalitzada, $f \in T_{x(t_0)}(M)$. D'ara endavant, quan no hi hagi perill de confusió, designarem per ∇ , en lloc de $\bar{\nabla}$, la derivada covariant de M associada a g_T . Així doncs, l'equació del moviment, a M , s'escriurà

$$f = \nabla_{\dot{x}} \dot{x}. \quad (8.8)$$

Fixem-nos que en aquesta equació no hi figuren les forces de lligadura.

5 Forma de Lagrange de les equacions del moviment

Per tal d'escriure d'una manera més manejable l'equació anterior, $f = \nabla_{\dot{x}} \dot{x}$, donarem un resultat general de varietats de Riemann. Abans, però, hem d'introduir unes notacions que ens seran còmodes.

Sigui (M, g) una varietat de Riemann de dimensió r , i $T(M)$ el seu fibrat tangent. La mètrica g dóna lloc a la funció de $T(M)$, que continuarem designant per g , que assigna $g_x(v, v)$ a cada $v \in T_x(M)$. Si $(U, x^1 \dots x^r)$ és una carta local de M , i $(\pi^{-1}(U), x^1 \dots x^r, v^1 \dots v^r)$ la carta local que li correspon a $T(M)$, la funció g , sobre $\pi^{-1}(U)$, s'escriurà

$$g = g_{ij} v^i v^j,$$

on g_{ij} és funció de $x^1 \dots x^r$, concretament

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

A tota corba $x(t)$ de M li associem, també, la corba $\tilde{x}(t)$ de $T(M)$:

$$t \longrightarrow \dot{x}(t) \in T_{x(t)}(M).$$

Si en una carta local $(U, x^1 \dots x^r)$ de M $x(t)$ s'escriu

$$x(t) = (x^1(t), \dots, x^r(t)),$$

la corba $\tilde{x}(t)$ s'escriurà a $(\pi^{-1}(U), (x^1 \dots x^r, v^1 \dots v^r))$

$$\tilde{x}(t) = (x^1(t), \dots, x^r(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^r(t)).$$

Amb aquestes notacions, passem a enunciar la proposició següent.

Proposició 8.1 *Sigui $x(t)$ una corba de M , i $\tilde{x}(t)$ la corba a $T(M)$ que li correspon. Sigui g la funció sobre $T(M)$ que correspon a la mètrica g de M . Sigui $(U, x^1 \dots x^r)$ una carta local de M , i $(\pi^{-1}(U), x^1 \dots x^r, v^1 \dots v^r)$ la carta local de $T(M)$ corresponent. Per a cada $h = 1 \dots r$, considerem la funció*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial v^h} \right)_{\tilde{x}(t)} - \left(\frac{\partial g}{\partial x^h} \right)_{\tilde{x}(t)},$$

que és una funció ordinària de t . Considerem, d'altra banda, $g(\nabla_{\dot{x}} \dot{x}, \frac{\partial}{\partial x^h})$, que també és una funció de t . Es compleix

$$2g(\nabla_{\dot{x}} \dot{x}, \frac{\partial}{\partial x^h}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial v^h} \right)_{\tilde{x}(t)} - \left(\frac{\partial g}{\partial x^h} \right)_{\tilde{x}(t)}.$$

DEMOSTRACIÓ. Les components de $\nabla_{\dot{x}}\dot{x}$ en la base $\partial/\partial x^1 \dots \partial/\partial x^r$ són

$$(\nabla_{\dot{x}}\dot{x})^k = \ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j.$$

Per tant, tindrem

$$g(\nabla_{\dot{x}}\dot{x}, \frac{\partial}{\partial x^h}) = g_{hk}\ddot{x}^k + g_{hk}\Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j. \quad (8.9)$$

De l'expressió dels símbols de Christoffel en funció de la mètrica obtindrem

$$g_{hk}\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(\partial_j g_{hi} + \partial_i g_{jh} - \partial_h g_{ij}),$$

on $\partial_j = \partial/\partial x^j$. Substituint a (8.9), tenim

$$g(\nabla_{\dot{x}}\dot{x}, \frac{\partial}{\partial x^h}) = g_{hk}\ddot{x}^k + \frac{1}{2}\partial_j g_{hi}\dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{1}{2}\partial_i g_{jh}\dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{1}{2}\partial_h g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j.$$

Però el segon i tercer termes del segon membre són iguals (amb uns altres índexs de sumació). Per tant,

$$g(\nabla_{\dot{x}}\dot{x}, \frac{\partial}{\partial x^h}) = g_{hk}\ddot{x}^k + \partial_j g_{hi}\dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{1}{2}\partial_h g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j. \quad (8.10)$$

D'altra banda, a $T(M)$, g s'expressa

$$g = g_{sk}v^s v^k.$$

Per tant,

$$\frac{\partial g}{\partial v^k} = 2g_{hk}v^k.$$

Per tant,

$$\left(\frac{\partial g}{\partial v^k}\right)_{\tilde{x}(t)} = 2g_{hk}\left(x^1(t) \dots x^n(t)\right)\dot{x}^k(t).$$

D'aquí obtindrem

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial v^k}\right)_{\tilde{x}(t)} = 2\partial_i g_{hk}\dot{x}^i \dot{x}^k + 2g_{hk}\ddot{x}^k.$$

Anàlogament,

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x^h}\right)_{\tilde{x}(t)} = \partial_h g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j.$$

Per tant,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial v^h} \right)_{\vec{x}(t)} - \left(\frac{\partial g}{\partial x^h} \right)_{\vec{x}(t)} = 2g(\nabla_{\dot{x}} \dot{x}, \frac{\partial}{\partial x^h}). \quad \blacksquare$$

Apliquem ara la proposició 8.1 a la mecànica, per tal d'escriure d'una altra manera l'equació (8.8) de l'apartat anterior.

Considerem, a la varietat M de posicions del sistema, la mètrica g_T . La funció g_T sobre $T(M)$ que li correspon, és la funció que a cada $v \in T_x(M)$ li associa

$$g_T(v, v) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i,$$

on $v = (v_1 \dots v_n)$ amb els $\vec{v}_i \in \mathbf{R}^3$. És a dir, la funció g_T assigna a cada velocitat virtual del sistema el doble de l'energia cinètica que li correspon. Si anomenem T l'energia cinètica, $g_T = 2T$, com a funció de $T(M)$. Aplicant la proposició 8.1 en una carta local $(U, q^1 \dots q^r)$ de M , tindrem, amb les coordenades $(q^1 \dots q^r, \dot{q}^1 \dots \dot{q}^r)$ de $\pi^{-1}(U)$,

$$g_T(\nabla_{\dot{x}} \dot{x}, \frac{\partial}{\partial q^h}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial T}{\partial q^h}.$$

Però, en virtut de (8.8),

$$g_T(\nabla_{\dot{x}} \dot{x}, \frac{\partial}{\partial q^h}) = g_T(f, \frac{\partial}{\partial q^h}) = (\text{recordant la definició de } f) = g(F, \frac{\partial}{\partial q^h}),$$

on g és la mètrica euclidiana de $\mathbf{R}^{3n}$. Si M , com a subvarietat de $\mathbf{R}^{3n}$, és parametritzada per

$$\vec{p}_i = \vec{p}_i(q^1 \dots q^r),$$

amb els $\vec{p}_i \in \mathbf{R}^3$, el vector tangent $\partial/\partial q^h$, com a vector de $\mathbf{R}^{3n}$, és $(\partial \vec{p}_i / \partial q^h)$, $i = 1 \dots n$. Per tant, $g(F, \frac{\partial}{\partial q^h}) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial q^h}$. Resumint, tindrem

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial q^h} = g(F, \frac{\partial}{\partial q^h}) = g_T(\nabla_{\dot{x}} \dot{x}, \frac{\partial}{\partial q^h}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial T}{\partial q^h}.$$

L'equació (8.8) serà, doncs, equivalent, en una carta local $(q^1 \dots q^r)$, al sistema d'equacions

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial q^h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial T}{\partial q^h}, \quad h = 1 \dots r. \quad (8.11)$$

T indica la funció energia cinètica, a $T(M)$, i $\vec{F}_i$ és la força que actua sobre la partícula P_i del sistema. $\vec{p}_i$ indica el vector posició de la partícula P_i .

Les varietats de Riemann no són absolutament necessàries en la deducció de les equacions (8.11), com es posa de manifest en el problema següent.

Problema. Un vector tangent a M , v , s'expressa en les coordenades $q_1 \dots q_r$, $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_r$ com $v = \sum_{k=1}^r \dot{q}^k \partial / \partial q^k$. Com a vector de $\mathbf{R}^{3n}$ serà $v = \sum \dot{q}^k \partial p / \partial q^k$, on $p = (p_1 \dots p_n)$. Tenint en compte que $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i \cdot v_i$, on $v = (v_1 \dots v_n)$ és un vector tangent, deduïu directament (8.11) de l'expressió (8.5), prenent allà $w = (w_1 \dots w_n) = \partial p / \partial q^h$.

Posem un exemple d'aplicació del sistema (8.11) a un problema concret. Considerem el pèndol simple de l'exemple 3 de l'apartat 1. Suposem que sobre P actua una força exterior $\vec{F}$. Es demana que s'escriguin les equacions del moviment. Amb les notacions de l'exemple 3, tindrem

$$\begin{cases} x = l \sin \varphi \\ y = -l \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{y} = l \dot{\varphi} \sin \varphi \end{cases} \quad T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \dot{\varphi} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = m l^2 \ddot{\varphi}.$$

Com que $\vec{p} = (x, y) = (l \sin \varphi, -l \cos \varphi)$, $\partial \vec{p} / \partial \varphi = (l \cos \varphi, l \sin \varphi)$. Si la força exterior $\vec{F}$ s'escriu $\vec{F} = (F^1, F^2)$, el sistema (8.11) es redueix aquí a l'equació

$$F^1 l \cos \varphi + F^2 l \sin \varphi = m l^2 \ddot{\varphi},$$

o sigui,

$$F^1 \cos \varphi + F^2 \sin \varphi = m l \ddot{\varphi},$$

on F^1 i F^2 són les components de la força exterior. Si suposem que la força exterior $\vec{F}$ és la de la gravetat, $\vec{F} = -mg(\vec{0}, \vec{1})$, llavors $F^1 = 0$, $F^2 = -mg$, i l'equació queda

$$-g \sin \varphi = l \ddot{\varphi}.$$

6 Equacions del moviment quan les forces deriven d'un potencial

En el cas que cada força $\vec{F}_i$ que actua sobre la partícula P_i derivi d'un potencial, les equacions (8.11) es poden posar d'una forma més senzilla, com veurem a continuació.

Suposem, doncs, que el sistema es mou sota l'acció d'un camp de forces $\vec{F}(m, x, y, z)$, que deriva d'un potencial $V(m, x, y, z)$. Per $V_i(x, y, z)$ designem $V(m_i, x, y, z)$. La força $\vec{F}_i$ que actua sobre la partícula P_i serà

$$\vec{F}_i = \left(-\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, -\frac{\partial V_i}{\partial y_i}, -\frac{\partial V_i}{\partial z_i} \right),$$

on (x_i, y_i, z_i) indica la posició p_i de la partícula P_i . Tindrem, doncs,

$$\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial q^h} = -\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q^h} - \frac{\partial V_i}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q^h} - \frac{\partial V_i}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q^h} = -\frac{\partial V_i}{\partial q^h}.$$

Per tant,

$$\sum \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial q^h} = -\frac{\partial V}{\partial q^h},$$

on $V = \sum_i V_i$. Llavors, les equacions (8.11) s'escriuran

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q^h} = 0. \quad (8.12)$$

Designem per L la diferència

$$L = T - V. \quad (8.13)$$

L s'anomena funció de Lagrange. És una funció sobre $T(M)$. Com que V està determinada llevat de constants additives, L també ho està. Com que V només depèn de $q_1 \dots q_r$, i no de $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_r$, es té

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^h} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}.$$

Tenint en compte això, les equacions (8.12) s'escriuen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial L}{\partial q^h} = 0. \quad (8.14)$$

Per exemple, en el cas del pèndol simple que evoluciona sota el camp de forces de la gravetat, $\vec{F} = -mg(\vec{0}, \vec{1})$, la funció potencial V és $V(m, x, y) = mgy$. La funció de Lagrange L serà

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = T(\varphi, \dot{\varphi}) - V(\varphi) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + lmg \cos \varphi.$$

Es té

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -lmg \sin \varphi,$$

d'on les equacions (8.14) es redueixen en aquest cas a

$$l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0,$$

que són les mateixes que hem trobat abans.

Insistim, però, que les equacions (8.11) són més generals que (8.14) perquè aquelles valen per a qualsevol força, derivi o no d'un potencial.

Observem que en el cas que el sistema consti d'una sola partícula que es mou lliurement a $\mathbf{R}^3$, sense cap lligadura, les equacions (8.11) es redueixen a la definició de força, $\vec{F} = m\vec{a}$. En efecte, el vector posició $\vec{p}$ de la partícula serà $\vec{p} = (x, y, z)$. $\partial p / \partial x = (1, 0, 0)$. Si $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$, el primer membre de (8.11), prenent $q^h = x$, serà

$$\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial x} = \vec{F} \cdot (\overrightarrow{1, 0, 0}) = F^1.$$

Calculem el segon membre de (8.11):

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = m\ddot{x}.$$

||
0

Per tant, l'equació (8.11), per a $q^h = x$, és

$$F^1 = m\ddot{x}.$$

Anàlogament, escrivint (8.11) per a $q^h = y, z$, obtindriem

$$F^2 = m\ddot{y}$$

$$F^3 = m\ddot{z}.$$

Aquestes tres equacions escalars no són altra cosa que

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Capítol 9

Teoremes de conservació. Xoc de partícules

1 Teoremes de conservació

Situem-nos en les hipòtesis de l'últim apartat del capítol anterior. Suposem que tenim un sistema constituït per n punts materials $P_1 \dots P_n$, de masses $m_1 \dots m_n$, amb lligadures holònomes independents del temps. Suposem que el sistema evoluciona per l'acció d'un camp de forces que deriva d'un potencial. Designarem per M , com al capítol anterior, la varietat de posicions del sistema (subvarietat de $\mathbf{R}^{3n}$, de dimensió $r =$ graus de llibertat). Aquí reprenem totes les notacions del capítol anterior.

Si φ_s és un grup uniparamètric qualsevol de transformacions de $\mathbf{R}^3$, designarem també per φ_s el grup uniparamètric de $\mathbf{R}^{3n}$ definit per $\varphi_s(\vec{x}) = (\varphi_s(\vec{x}_1), \dots, \varphi_s(\vec{x}_n))$, on $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^{3n}$ el descomponem en $\vec{x} = (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$, amb $\vec{x}_i \in \mathbf{R}^3$.

Amb aquesta notació, direm que el sistema de n partícules $P_1 \dots P_n$ és invariant per un grup uniparamètric φ_s de $\mathbf{R}^3$ si, per a tot $x \in M \subset \mathbf{R}^{3n}$, $\varphi_s(x)$ és de M . Dit d'una altra manera, si el grup φ_s de $\mathbf{R}^{3n}$ dóna lloc, per restricció als punts de M , a un grup uniparamètric de M . Això equival a dir que si $\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n$ és una posició del sistema (compatible amb les lligadures), $\varphi_s(\vec{x}_1) \dots \varphi_s(\vec{x}_n)$ també és una posició del sistema.

Per a cada v de $\mathbf{R}^3$, designarem per $(T_v)_s$ el grup uniparamètric de $\mathbf{R}^3$ de translacions en la direcció de $\vec{v}$,

$$(T_v)_s(P) = P + sv.$$

Donat un punt O de $\mathbf{R}^3$ i un vector v de $\mathbf{R}^3$, designarem per $(R_{O,v})_s$ el

grup uniparamètric de $\mathbf{R}^3$ de rotacions entorn de la recta que passa per O i té v com a vector director.

Teorema 9.1 (Conservació de la quantitat de moviment) *Si el sistema format pels punts materials $P_1 \dots P_n$ és invariant per un grup uniparamètric de translacions de $\mathbf{R}^3$, $(T_v)_s$, i si evoluciona sota un camp de forces que deriva d'un potencial i la funció potencial V , a M , també és invariant per $(T_v)_s$, llavors el producte escalar, a $\mathbf{R}^3$, de la quantitat de moviment $\vec{\mathcal{P}}$ del sistema pel vector v (el del grup de translacions T_v), es manté constant al llarg de qualsevol trajectòria del sistema.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $x(t) = (p_1(t) \dots p_n(t))$ una trajectòria del sistema. Designem per X el camp sobre M corresponent al grup uniparamètric $(T_v)_s$. Fixat t_0 , en un petit entorn de $x(t_0)$, a M , podem prendre un sistema de coordenades $q_1 \dots q_r$ de M per a les quals el camp X sigui $\partial/\partial q^1$. Com que la funció potencial V és invariant per $(T_v)_s$, això vol dir que $X(V) = 0$, equació que en aquestes coordenades és $\partial V/\partial q^1 = 0$. L'equació de Lagrange corresponent a la coordenada q_1 dirà

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = - \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0. \quad (9.1)$$

Com que $T = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$, es té

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum m_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_1} \cdot \vec{v}_i. \quad (9.2)$$

Però, com que $v_i = \sum \dot{q}_k \partial p_i / \partial q_k$, $\partial v_i / \partial \dot{q}_1 = \partial p_i / \partial q_1$. Ara veurem que $\partial p_i / \partial q_1 = v$ (el vector del grup de translacions T_v). En efecte,

$$X = \left(\frac{\partial p_1}{\partial q_1} \dots \frac{\partial p_n}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial p}{\partial q_1}.$$

Com que X ha de ser tangent a la corba de $\mathbf{R}^{3n}$

$$s \longrightarrow (\vec{p}_1 + s\vec{v}, \dots, \vec{p}_n + s\vec{v}),$$

X serà el vector $(v \dots v)$, i $\partial p_i / \partial q_1 = v$. Resumint, tindrem

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i m_i \vec{v} \cdot \vec{v}_i = \left(\sum m_i \vec{v}_i \right) \cdot \vec{v} = \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{v}.$$

Provem ara que $\partial T / \partial q_1 = 0$. En efecte,

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \sum m_i \frac{\partial v_i}{\partial q_1} \cdot v_i .$$

Com que

$$\vec{v}_i = \sum \dot{q}_k \frac{\partial p_i}{\partial q_k} , \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = \sum_{i,k} \dot{q}_k \frac{\partial^2 p_i}{\partial q_k \partial q_1} \cdot v_i .$$

Ara bé, derivar respecte a q_1 és derivar en la direcció del grup uniparamètric. Per tant,

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_1} = \frac{d}{ds}(P + sv)|_{s=0} = v .$$

Així doncs, $\partial p_i / \partial q_1$ és constant. Per tant, $\partial^2 p_i / \partial q_k \partial q_1 = 0$. Per tant, $\partial T / \partial q_1 = 0$. En resum, l'equació (9.1) s'escriu

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{v}) = 0 ,$$

i el teorema queda demostrat. ■

Exemples.

1) Considerem el pèndol amb punt de suspensió mòbil (exemple 5 de l'apartat 1 del capítol anterior). Sigui $(T_v)_s$ el grup uniparamètric de translacions associat al vector director v de la barra sobre la qual llisca el punt de suspensió del pèndol. La varietat de posicions del sistema $(\subset \mathbf{R}^4)$ és invariant per $(T_v)_s$. Si suposem que el pèndol evoluciona sense forces exteriors, la funció potencial V corresponent és constant i V també és invariant per $(T_v)_s$. Aquí es pot aplicar, doncs, el teorema. Si suposem que la barra és horitzontal, $v = (1, 0)$, i el pèndol evoluciona sota el camp de forces de la gravetat, $\vec{F} = -mg(\vec{0}, \vec{1})$, la funció potencial és $V(x, y) = mgy$. En aquest cas també V és invariant per $(T_v)_s$ i es pot aplicar el teorema.

2) Un cos rígid constituït per n partícules $P_1 \dots P_n$, amb les úniques lligadures de la rigidesa, $\|P_i - P_j\| = \text{constant}$, que evoluciona lliurement a $\mathbf{R}^3$ en absència de forces exteriors, és invariant per qualsevol grup de translacions $(T_v)_s$. Per tant, el producte escalar $\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{v}$ roman constant per a qualsevol $\vec{v}$ de $\mathbf{R}^3$. Això implica que $\vec{\mathcal{P}}$ és constant.

Ara donarem un altre teorema de conservació similar al teorema 9.1. Abans, però, ens cal introduir una mica de notació.

Donat un punt O de $\mathbf{R}^3$, anomenarem moment respecte a O de la quantitat de moviment del sistema, en un instant t , el vector de $\mathbf{R}^3$

$$\vec{M}_O = \sum (\vec{p}_i - \vec{O}) \wedge m_i \vec{v}_i ,$$

on $\vec{v}_i$ és la velocitat de P_i a l'instant t , i $\vec{p}_i$ la posició de P_i .

Teorema 9.2 (Conservació del moment de la quantitat de moviment) *Si existeix un grup uniparamètric de rotacions de $\mathbf{R}^3$, $(R_{O,v})_s$ que deixa invariant el sistema i la seva funció potencial V , llavors el producte escalar, a $\mathbf{R}^3$, del vector $\vec{v}$ del grup uniparamètric de rotacions pel moment de la quantitat de moviment, respecte a O , es manté constant al llarg de qualsevol trajectòria del sistema.*

DEMOSTRACIÓ. Designem per X , com abans, el camp sobre M corresponent al grup uniparamètric $(R_{O,v})_s$. Si $x(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ és una trajectòria del sistema, fixat t_0 , en un entorn de $x(t_0)$, a M , prenguem unes coordenades $q_1 \dots q_r$ tals que X sigui $\partial/\partial q_1$. L'equació de Lagrange respecte a aquesta coordenada serà (9.1). Igual que abans tindrem

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum m_i \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial q_1} \cdot \vec{v}_i.$$

El vector X serà $(\partial p_1/\partial q_1, \dots, \partial p_n/\partial q_1)$, i haurà de ser tangent a la corba

$$s \longrightarrow ((R_{O,v})_s(p_1), \dots, (R_{O,v})_s(p_n)).$$

Es pot veure immediatament que a $\mathbf{R}^3$ es compleix

$$\left(\frac{d}{ds} (R_{O,v})_s(P) \right)_{s=0} = K \vec{v} \wedge (\vec{P} - \vec{O}), \quad (9.3)$$

on K és una constant. En efecte, prenguem, a $\mathbf{R}^3$, un sistema ortonormal de coordenades, on O sigui l'origen i l'eix de gir sigui el de les z . En aquestes coordenades, $\vec{v} = (0, 0, \lambda)$. Si anomenem (x, y, z) les coordenades de P , i $(x(s), y(s), z(s))$ les de $(R_{O,v})_s(P)$, tindrem

$$\begin{cases} x(s) = x \cos s - y \sin s \\ y(s) = x \sin s + y \cos s \\ z(s) = z. \end{cases}$$

Per tant,

$$\left(\frac{d}{ds} (R_{O,v})_s(P) \right)_{s=0} = (-y, x, 0) = \overrightarrow{(0, 0, 1)} \wedge \overrightarrow{(x, y, z)} = \frac{1}{\lambda} \vec{v} \wedge (\vec{P} - \vec{O}),$$

d'on s'obté (9.3). Ara tornem a la nostra situació. Tenim

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_1} = \left(\frac{d}{ds} (R_{O,v})_s(p_i) \right)_{s=0} = K \vec{v} \wedge (\vec{p}_i - \vec{O}). \quad (9.4)$$

Per tant,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = K \sum m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{v} \wedge (\vec{p}_i - \vec{O})) = K \sum v \cdot ((\vec{p}_i - \vec{O}) \wedge m_i \vec{v}_i) = K \vec{v} \cdot \vec{M}_O,$$

on $\vec{M}_O$ és el moment de la quantitat de moviment respecte a O. Vegem ara que aquí, com abans, també es compleix $\partial T / \partial q_1 = 0$. En efecte,

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{1}{2} \sum m_i \frac{\partial}{\partial q_1} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \sum m_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_1} \cdot \vec{v}_i.$$

Però com que

$$v_i = \sum \dot{q}_k \frac{\partial p_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial q_1} = \sum \dot{q}_k \frac{\partial^2 p_i}{\partial q_1 \partial q_k},$$

i com que derivar respecte a q_1 és derivar en la direcció del grup uniparamètric,

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_1} = K \vec{v} \wedge (\vec{p}_i - \vec{O}).$$

Per tant,

$$\frac{\partial v_i}{\partial q_1} = \sum \dot{q}_k K v \wedge \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = K v \wedge v_i.$$

D'on $\partial T / \partial q_1 = \sum m_i K (\vec{v} \wedge \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i = 0$ (per les propietats del producte mixt a $\mathbf{R}^3$). En resum, l'equació (9.1) s'escriu $\frac{d}{dt} K (\vec{v} \cdot \vec{M}_O) = 0$, i com que K és una constant, el teorema queda demostrat. ■

Exemples. El pèndol i el doble pèndol dels exemples 3 i 4 de l'apartat 1 del capítol anterior són invariants pel grup uniparamètric de rotacions entorn del punt de suspensió. Si suposem que evolucionen pels únics efectes de les velocitats inicials, sense cap força exterior que actuï sobre el sistema, llavors la funció potencial (que és qualsevol constant) també és invariant per aquest grup uniparamètric i podem aplicar el teorema 9.2.

Teorema 9.3 (Conservació de l'energia) *Suposem que el sistema de partícules sotmès a lligadures evoluciona sota l'acció d'un camp de forces que deriva d'un potencial. Anomenem V la funció potencial en la varietat M de les posicions del sistema. La funció $H = T + V$ és constant al llarg de qualsevol trajectòria del sistema.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $x(t_0)$ un punt de M que correspongui a la posició del sistema en un instant $t = t_0$. Prenguem unes coordenades de M en un entorn

de $x(t_0)$, $q_1 \dots q_r$. T tindrà, en aquestes coordenades, una expressió de la forma

$$T = \sum_{k,h} T_{kh} \dot{q}_k \dot{q}_h .$$

Així doncs,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2 \sum_h T_{kh} \dot{q}_h .$$

Per tant,

$$\sum \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T .$$

(Això és un cas particular del teorema d'Euler sobre les funcions homogènies.)
Tenim, doncs,

$$H = T + V = 2T - (T - V) = 2T - L = \sum \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L = \sum \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L .$$

Restringim H sobre $x(t)$ en un entorn de $x(t_0)$. H serà una funció de t . Tindrem

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{dL}{dt} = \\ &= \ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k = 0 \end{aligned}$$

(en virtut de les equacions de Lagrange). ■

2 Xoc de partícules

Siguin P_1 i P_2 dos cossos petits, que idealitzarem com a punts, de masses respectives m_1 i m_2 . Suposem que es mouen per l'espai sense acció de forces exteriors. Cada un d'ells descriurà, doncs, una trajectòria rectilínia amb moviment uniforme. Suposem que aquestes trajectòries són tals que les dues partícules es troben en un mateix punt de l'espai en un mateix instant de temps. És a dir, xoquen. Proposem-nos el problema de trobar el moviment de les dues partícules després de la col·lisió. L'experiència ens mostra els fets següents:

1) La trajectòria $P_i(t)$ de cada partícula, $i = 1, 2$, deixa de ser diferenciable en el moment del xoc. Per tant, les lleis de la mecànica que hem utilitzat fins ara no serveixen per tractar aquest problema, ja que fins ara sempre havíem fet la hipòtesi que les trajectòries eren diferenciables.

2) La solució no pot ser única sense fer hipòtesis suplementàries, ja que quan xoquen no es comporten d'igual manera dues boles de billar que dues boles de plom. Les primeres no es deformen quan col·lideixen, mentre que les segones sí. Això fa que el moviment després del xoc sigui diferent en cada cas.

Prendrem com a axioma que la quantitat de moviment del sistema (format per les dues partícules) roman constant abans i després del xoc (sempre que no actuïn forces exteriors). Suposarem que aquest axioma es compleix en tota classe de xocs (tant en el de les boles de billar com en el de les boles de plom). Si designem per $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ les velocitats de les partícules abans del xoc, i per $\vec{v}'_1$ i $\vec{v}'_2$ les velocitats després del xoc, l'axioma diu

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2, \quad (9.5)$$

equació que, sola, no és suficient per determinar les velocitats després del xoc. Hem vist, en el teorema 9.1 de l'apartat anterior, que en tot sistema sobre el qual no actuen forces exteriors i tal que sigui invariant per qualsevol grup de translacions (si no hi ha lligadures, això sempre es compleix), la quantitat de moviment roman constant. Encara que aquest teorema no és aplicable al cas de xoc perquè les trajectòries deixen de ser diferenciables, l'axioma que hem acceptat no és altra cosa que l'extrapolació del teorema 9.1 al cas de xoc.

El xoc es diu completament inelàstic (boles de plom) quan els dos cossos romanen junts després del xoc. Llavors $\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2$. Això, juntament amb l'equació (9.5), determina completament $\vec{v}'_1$ i $\vec{v}'_2$ quan es coneixen $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$.

Estudiem ara els xocs completament elàstics (boles de billar). En primer lloc suposem que el moviment de les dues partícules es realitza al llarg d'una recta. Com que el moviment és unidimensional, els vectors velocitat de cada partícula seran escalars. El xoc es diu completament elàstic quan l'energia cinètica (l'única que hi ha, perquè, com que no existeixen forces exteriors, no hi ha energia potencial) roman constant abans i després del xoc. Les dues equacions escalars

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \\ m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1v'^2_1 + m_2v'^2_2 \end{cases}$$

determinen v'_1 i v'_2 en funció de v_1 i v_2 .

Observem que en el cas del xoc de boles de plom, part de l'energia s'inverteix a deformat les boles i part es transforma en calor. No es conserva l'energia cinètica abans i després del xoc.

Estudiem ara el cas general en què el moviment de les dues partícules no es realitza sobre una recta. Abans del xoc, les dues partícules P_1 i P_2 es mouen

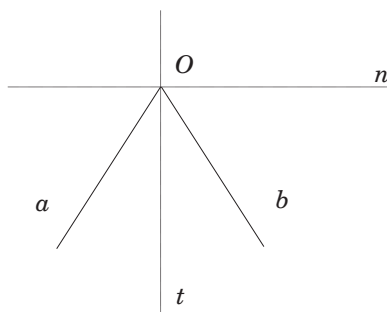


Figura 9.1

amb moviment rectilini i uniforme, ja que sobre elles no actua cap força. Com que se suposa que en un moment determinat les dues partícules xoquen, les trajectòries abans del xoc són coplanàries. Acceptarem com a axioma que les trajectòries després del xoc estan contingudes en el mateix pla que conté les trajectòries abans del xoc.

Amb aquest axioma, només ens cal estudiar el xoc de partícules el moviment de les quals es realitza sempre en un pla. Siguin a i b les trajectòries de la primera i de la segona partícula abans del xoc (figura 9.1). Sigui O el punt d'intersecció de a i b . Sigui t la bisectriu de l'angle $\hat{a}b$ i n la recta per O perpendicular a t . Acceptarem com a axioma del xoc elàstic que el xoc no influeix gens sobre el moviment de les projeccions sobre t (en la direcció de n) de les dues partícules, mentre que les projeccions sobre n (en la direcció de t) de les dues partícules segueixen les lleis del xoc elàstic unidimensional que hem formulat abans. Això determina completament el moviment després del xoc.

En el cas que els dos cossos P_1 i P_2 siguin esferes (i no els puguem idealitzar com a punts), per formular aquest axioma hem de prendre com a recta n la que uneix els dos centres en el moment de la col·lisió i com a recta t la tangent a les dues boles continguda en el pla determinat per les trajectòries dels dos centres. La justificació intuïtiva d'aquest axioma del xoc elàstic és que la reacció elàstica actua normalment, i no tangencialment.

Capítol 10

Funció de Lagrange dels cossos rígids

1 Centre de masses

Sigui K un sistema format per n partícules $P_1 \dots P_n$ (lliures o amb lligadures), de masses $m_1 \dots m_n$. S'anomena centre de masses del sistema el punt $\vec{C}$ de $\mathbf{R}^3$ definit per

$$\vec{C} = \frac{\sum m_i \vec{p}_i}{\sum m_i}, \quad (10.1)$$

on $\vec{p}_i$ indica, com sempre, el vector posició de la partícula P_i . L'escalar $m = \sum m_i$ s'anomena massa del sistema. Derivant (10.1) respecte al temps t , s'obté

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\vec{\mathcal{P}}}{m},$$

on $\mathcal{P}$ és la quantitat de moviment. Dit d'una altra manera,

$$\vec{\mathcal{P}} = m \frac{d\vec{C}}{dt}. \quad (10.2)$$

Això vol dir que la quantitat de moviment d'un sistema és la mateixa que tindria una partícula situada al centre de masses, que tingués com a massa, la del sistema.

2 Cossos rígids. Tensor d'inèrcia

Suposem ara que K és un cos rígid constituït per n partícules $P_1 \dots P_n$. Suposem que $n \geq 4$, i que entre tots els punts $P_1 \dots P_n$ n'hi ha quatre de linealment

independents (com a punts de $\mathbf{R}^3$). Anomenem m la massa total del sistema, $m = \sum m_i$. Sigui C el centre de masses de $P_1 \dots P_n$. Si P és qualsevol de les partícules del cos, i $\vec{p}$ el seu vector posició, podem escriure

$$\vec{p}(t) = (\vec{p}(t) - \vec{C}(t)) + \vec{C}(t).$$

Derivant, tenim

$$\vec{v}_P = \frac{d(\vec{p} - \vec{C})}{dt} + \vec{v}_C, \quad (10.3)$$

on $\vec{v}_P$ indica la velocitat de la partícula P i $\vec{v}_C$ la velocitat del centre de masses. Per calcular el terme $d(\vec{p} - \vec{C})/dt$ que figura a (10.3), necessitem el teorema següent:

Teorema 10.1 *Per a cada instant de temps t , existeix un vector $\vec{\Omega}(t)$ tal que per a qualsevol partícula P del cos rígid es compleix*

$$\frac{d(\vec{p} - \vec{C})}{dt} = \vec{\Omega}(t) \wedge (\vec{p} - \vec{C})(t).$$

$\vec{\Omega}(t)$ s'anomena velocitat angular del sòlid respecte al centre de masses, a l'instants t .

DEMOSTRACIÓ. Elegim tres punts, entre els $\vec{p}_i$, tals que les seves diferències amb C siguin linealment independents. Suposem, per exemple, que aquests punts són p_1, p_2, p_3 . Fixem un instant de temps t_0 . Per a cada t hi haurà una única transformació lineal de $\mathbf{R}^3$ que aplicarà $(\vec{p}_i - \vec{C})(t_0)$ en $(p_i - C)(t)$, per a $i = 1, 2, 3$, que serà una isometria. És evident que aquesta transformació aplicarà, també, els altres $(p_i - C)(t_0)$ en $(p_i - C)(t)$, $i = 4 \dots n$. Anomenem $A(t)$ la matriu d'aquesta transformació en una base ortonormal fixada de $\mathbf{R}^3$. $A(t_0)$ és la matriu identitat, I . Cada $A(t)$ és una matriu ortogonal. Designem per $\dot{A}(t_0)$ la derivada de $A(t)$ en el punt t_0 . Vegem que $\dot{A}(t_0)$ és una matriu antisimètrica. En efecte, designant per tA la transposta de A , derivant la identitat $A^t A = I$, s'obté

$$\dot{A}(t) \cdot {}^tA(t) + A(t) \cdot {}^t\dot{A}(t) = 0.$$

Si fem ara $t = t_0$, com que $A(t_0) = {}^tA(t_0) = I$, resulta que $\dot{A}(t_0)$ és antisimè-

trica. Escrivim, doncs, aquesta matriu antisimètrica de la manera següent:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Omega^3(t_0) & \Omega^2(t_0) \\ \Omega^3(t_0) & 0 & -\Omega^1(t_0) \\ -\Omega^2(t_0) & \Omega^1(t_0) & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

Anomenem $\vec{\Omega}(t_0)$ el vector de components $(\Omega^1(t_0), \Omega^2(t_0), \Omega^3(t_0))$. Si $\vec{p}$ és el vector posició de qualsevol partícula P del cos rígid, tindrem

$$(\vec{p} - \vec{C})(t) = A(t)(\vec{p} - \vec{C})(t_0).$$

D'on

$$\left(\frac{d(\vec{p} - \vec{C})}{dt} \right)_{t=t_0} = \dot{A}(t_0)(\vec{p} - \vec{C})(t_0).$$

Tenint en compte l'expressió (10.4) de $\dot{A}(t_0)$, tindrem

$$\left(\frac{d(\vec{p} - \vec{C})}{dt} \right)_{t=t_0} = \vec{\Omega}(t_0) \wedge (\vec{p} - \vec{C})(t_0), \quad (10.5)$$

i el teorema queda demostrat. ■

Per justificar la denominació de velocitat angular respecte al punt C , del vector $\vec{\Omega}$, basta observar que quan el cos gira entorn d'una recta que passa per C , tal com hem vist al capítol anterior, es té l'expressió (10.5), amb $\vec{\Omega}$ un vector que té la direcció de l'eix de gir i mòdul la velocitat angular de la rotació.

Apliquem ara aquest teorema a l'expressió (10.3). Quedarà

$$\vec{v}_P = \vec{\Omega} \wedge (\vec{p} - \vec{C}) + \vec{v}_C. \quad (10.6)$$

Fent servir aquesta expressió, calculem l'energia cinètica T del cos rígid. Sabem que

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{P_i} \cdot \vec{v}_{P_i} = \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i \left\{ (\vec{\Omega} \wedge (\vec{p}_i - \vec{C}) + \vec{v}_C) \cdot (\vec{\Omega} \wedge (\vec{p}_i - \vec{C}) + \vec{v}_C) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}_C \cdot \vec{v}_C + \sum m_i \vec{v}_C \cdot (\vec{\Omega} \wedge (\vec{p}_i - \vec{C})) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\Omega} \wedge (\vec{p}_i - \vec{C})) \cdot (\vec{\Omega} \wedge (\vec{p}_i - \vec{C})). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Ara bé, en el segon terme d'aquest últim membre apareix $\sum(\vec{p}_i - \vec{C})m_i = \sum m_i \vec{p}_i - (\sum m_i)\vec{C} = 0$, per definició de centre de masses. A l'últim terme apareix el quadrat de la norma del producte vectorial $\vec{\Omega} \wedge (\vec{p}_i - \vec{C})$. Tenim

$$\|\vec{\Omega} \wedge (\vec{p}_i - \vec{C})\|^2 = \|\Omega\|^2 \|\vec{p}_i - \vec{C}\|^2 \sin^2 \alpha,$$

on α és l'angle dels dos vectors Ω i $\vec{p}_i - \vec{C}$. Substituint $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, s'obté

$$\|\Omega \wedge (\vec{p}_i - \vec{C})\|^2 = \|\Omega\|^2 \|\vec{p}_i - \vec{C}\|^2 - (\vec{\Omega} \cdot (\vec{p}_i - \vec{C}))^2.$$

Substituint a (10.7), obtenim

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_C \cdot \vec{v}_C + \frac{1}{2} \sum m_i \left\{ \|\Omega\|^2 \|\vec{p}_i - \vec{C}\|^2 - (\vec{\Omega} \cdot (\vec{p}_i - \vec{C}))^2 \right\}. \quad (10.8)$$

Fixem-nos que el primer terme no és altra cosa que l'energia cinètica del centre de masses, suposant que tota la massa del cos està concentrada allà. Anomenarem energia cinètica de rotació el segon terme de (10.8), i la designarem per T_{rot} . Ara manipulem una mica l'expressió de T_{rot} per tal d'explicitar el seu caràcter quadràtic respecte a les components del vector $\vec{\Omega}$. Expressem T_{rot} en un sistema de coordenades rectangulars solidari amb el cos, d'origen C . Designem per (x_i^1, x_i^2, x_i^3) les components de $\vec{p}_i - \vec{C}$ en aquest sistema. Tindrem

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left\{ \sum_k (\Omega^k)^2 \sum_h (x_i^h)^2 - \left(\sum_k \Omega^k x_i^k \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left\{ \sum_{k,s} \Omega^k \Omega^s \delta_{ks} \sum_h (x_i^h)^2 - \sum_{k,s} \Omega^k \Omega^s x_i^k x_i^s \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,s} \left(\sum_i m_i (\delta_{ks} \sum_h (x_i^h)^2 - x_i^k x_i^s) \right) \Omega^k \Omega^s. \end{aligned}$$

Designem per I_{ks} l'expressió següent:

$$I_{ks} = \sum_i m_i (\delta_{ks} \sum_h (x_i^h)^2 - x_i^k x_i^s). \quad (10.9)$$

Fixem-nos que cada I_{ks} només depèn de les característiques del cos en repòs. Tenim, doncs

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{k,s} I_{ks} \Omega^k \Omega^s. \quad (10.10)$$

La matriu $(I_{k,s})$, que és simètrica, dona lloc a un tensor dues vegades covariant que s'anomena tensor d'inèrcia del cos. Donem a continuació l'expressió explícita de la matriu (I_{ks}) , utilitzant la notació més còmoda (x_i, y_i, z_i) en lloc de (x_i^1, x_i^2, x_i^3) :

$$(I_{ks}) = \begin{pmatrix} \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i y_i x_i & \sum m_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i z_i x_i & -\sum m_i z_i y_i & \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}.$$

Les components I_{11}, I_{22}, I_{33} s'anomenen moments d'inèrcia del cos respecte als eixos x, y, z respectivament. Naturalment, com que la matriu anterior és simètrica, podrem trobar uns eixos en què diagonalitzi. Aquests eixos, que van lligats a la particular forma del cos, s'anomenen eixos d'inèrcia. En aquests eixos, la matriu només tindrà moments d'inèrcia.

Si en comptes de suposar que el cos està format per n partícules, suposem que és un cos continu de densitat ρ , el raonament anterior es pot extrapolar, i el tensor d'inèrcia vindrà donat per

$$I_{ks} = \int_{\text{cos}} \rho (\delta_{ks} \sum_h (x^h)^2 - x^k x^s) dx^1 dx^2 dx^3. \quad (10.11)$$

Ara podem resumir tot el que hem fet en el resultat següent:

Teorema 10.2 *L'energia cinètica d'un cos rígid es descompon en dos termes. El primer és l'energia cinètica del centre de masses, suposant que tota la massa està concentrada allà. El segon, que designem per T_{rot} , s'expressa, en un sistema de coordenades lligat al cos, de la manera següent:*

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{k,s} I_{ks} \Omega^k \Omega^s,$$

on (I_{ks}) és una matriu simètrica que només depèn de les característiques del cos en repòs i $\vec{\Omega}$ és la velocitat angular respecte al centre de masses.

3 Càlcul de la funció de Lagrange en els cossos rígids

Considerem un sistema S de punts materials, $P_1 \dots P_k \dots P_n$, sotmès a lligadures. Suposem que els k primers punts, $P_1 \dots P_k$, constitueixen un cos rígid que

designarem per K . Suposem que tot el sistema S evoluciona sota l'acció d'un camp de forces $\vec{F}(m, x, y, z)$ que deriva d'una funció potencial $V(m, x, y, z)$. Volem calcular la funció de Lagrange L del sistema.

L'energia cinètica T del sistema S es descompondrà (per definició d'energia cinètica d'un sistema) en dues parts, l'energia cinètica T_K del sòlid K i l'energia cinètica T' de les partícules restants.

La funció potencial V sobre la varietat M de posicions del sistema,

$$V(q_1 \dots q_r) = \sum_i V(m_i, p_i(q_1 \dots q_r)), \quad (10.12)$$

es descompondrà també en V_K i V' , on V_K és la suma dels k primers termes del sumatori (10.12), i V' la suma dels termes restants. Tindrem

$$L = (T_K - V_K) + (T' - V') = L_K + L',$$

on $L_K = T_K - V_K$ i $L' = T' - V'$.

Tot seguit direm com es calcula L_K . L'apartat anterior ens diu com calcular T_K . El següent teorema ens dirà com es pot calcular V_K en alguns casos importants.

Teorema 10.3 *Suposem que la funció potencial $V(m, x, y, z)$ és de la forma $\Phi(mx, my, mz)$, on Φ és una funció lineal sobre $\mathbf{R}^3$. Si $\vec{C}$ és el centre de masses de $P_1 \dots P_k$, i μ la massa total del cos K , llavors*

$$V_K(q_1 \dots q_r) = V(\mu, \vec{C}(q_1 \dots q_r)).$$

DEMOSTRACIÓ.

$$\begin{aligned} V_K &= \sum_{i=1}^k V(m_i, p_i(q_1 \dots q_r)) = \sum \Phi(m_i p_i(q_1 \dots q_r)) = \\ &= \Phi\left(\sum m_i p_i\right) = \Phi(\mu \vec{C}) = V(\mu, \vec{C}). \end{aligned}$$

Això prova el teorema. ■

Aquest raonament es pot extrapolar al cas en què K sigui un cos continu.

Aquest teorema, encara que sigui bastant restrictiu, val quan el sistema evoluciona sota l'acció de la gravetat, ja que $V(m, x, y, z) = mgz$ compleix les hipòtesis, amb $\Phi(x, y, z) = gz$.

Donem un exemple de càlcul de la funció de Lagrange d'un sistema en el qual intervinguin cossos sòlids.

Exemple. Suposem un triangle rectangle sòlid, homogeni, de massa M , que pot lliscar lliurement per un dels seus catets sobre l'eix de les x . Sobre la

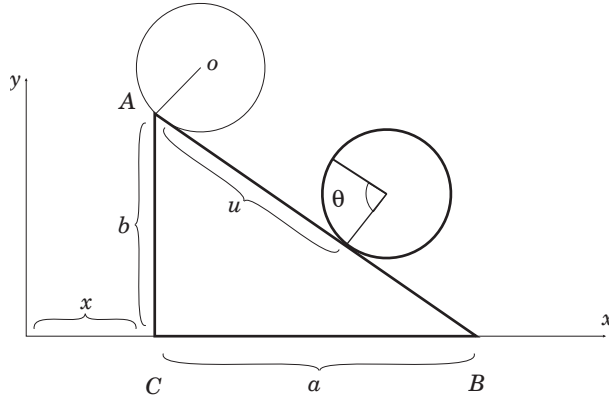


Figura 10.1

hipotenusa s'hi col·loca una roda homogènia de massa m i radi R . Sota l'acció de la gravetat, la roda cau pendent avall i, al mateix temps, impulsa el triangle cap endarrera. Estudieu-ne el moviment.

Anomenem A, B, C els vèrtexs del triangle. Suposem que C és el vèrtex que correspon a l'angle recte. Suposem que el catet que està en contacte amb l'eix de les x és CB . Sigui a la seva longitud. Sigui b la longitud de l'altre catet. Sigui x l'abscissa del punt C . Colloquem la roda al capdamunt del pendent, de manera que AB sigui tangent a la roda en el punt A . AB serà perpendicular al radi OA . Llavors marquem sobre la roda el radi OA . Quan la roda és en qualsevol altra posició, anomenem θ l'angle que forma el radi que passa pel punt de tangència en aquell moment amb el radi que hem marcat abans. Aquest angle el comptem en el sentit de les agulles del rellotge. Designem per u la distància entre A i el punt de tangència en aquell moment. La condició que la roda “rodi” s'escriu

$$\theta = \frac{u}{R} \text{ mòdul } 2\pi.$$

El sistema té dos graus de llibertat. Prenguem x, u com a coordenades. L'energia cinètica de la roda es descompondrà en dues parts, energia cinètica del centre, que designarem per T_O , i energia cinètica de rotació, T_{rot} . Recordem que

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum I_{ks} \Omega^k \Omega^s, \quad (10.13)$$

essent $\vec{\Omega}$ la velocitat angular. Aquí, la velocitat angular de la roda serà sempre perpendicular al pla del dibuix i tindrà mòdul $\dot{\theta} = \dot{u}/R$. A $\mathbf{R}^3$, Ω serà $(0, 0, \dot{u}/R)$. Això fa que (10.13) sigui, en aquest cas, $I\dot{u}^2/2R^2$, on I és el moment d'inèrcia del disc respecte al centre. Es pot veure immediatament que $I = mR^2/2$. Per tant,

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{4}m\dot{u}^2.$$

Ara calculem T_O . Un càlcul elemental mostra que les coordenades del centre del disc, O, vénen donades per

$$\vec{O} = (x, b) + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(ua + Rb, aR - ub).$$

Per tant, la velocitat $\vec{v}_O$ del punt $\vec{O}$ serà

$$\vec{v}_O = (\dot{x}, 0) + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\dot{u}(a, -b).$$

L'energia cinètica T_O del punt O serà

$$T_O = \frac{1}{2}m(\dot{u}^2 + \dot{x}^2 + \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\dot{u}\dot{x}).$$

Com que el triangle només es desplaça, no gira, la seva energia cinètica serà només la del seu centre de masses, $\frac{1}{2}M\dot{x}^2$. Resumint, l'energia cinètica total del sistema serà

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{u}^2 + \dot{x}^2 + \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\dot{u}\dot{x}) + \frac{1}{4}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2.$$

L'energia potencial del sistema, pel teorema 10.3, serà la suma de l'energia potencial del centre del triangle, $mg b/3$, més l'energia potencial del centre de la bola, que és

$$mg\left(b + \frac{aR}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{ub}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

Ara bé, com que l'energia potencial V queda determinada, llevat de constants additives, podem suprimir tots els termes constants de V . Tenim, doncs,

$$V = -\frac{mgbu}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Per tant,

$$L = \frac{3}{4}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}(m + M)\dot{x}^2 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\dot{u}\dot{x} + \frac{mg b}{\sqrt{a^2 + b^2}}u.$$

Capítol 11

Llei de gravitació universal i el problema dels dos cossos

1 Equacions de les còniques en polars

Per tal d'abordar l'anomenat problema dels dos cossos, primer hauríem de repassar algunes qüestions geomètriques que farem servir, referents a les còniques.

Considerem a $\mathbf{R}^2$ l'el·lipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \quad (11.1)$$

i la hipèrbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (11.2)$$

Suposem $a \geq b$. Per tal de tractar conjuntament aquestes dues corbes, posarem

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (11.3)$$

on ε podrà valdre 1 o -1 . Anomenarem focus de la cònica (11.3) els dos punts $(-c, 0)$ i $(c, 0)$, on $c = \sqrt{a^2 - \varepsilon b^2}$. Com que hem suposat $a \geq b$, c sempre és real. Anomenarem excentricitat de la cònica (11.3) el nombre $e = c/a = \sqrt{1 - \varepsilon(b/a)^2}$. Remarquem que $e < 1$ en el cas de l'el·lipse ($e = 0$ equival al fet que la cònica sigui una circumferència) i $e > 1$ en el cas de la hipèrbola.

Considerem el focus $(c, 0)$ de (11.3). En el cas de l'el·lipse ens proposem expressar (11.1) en coordenades polars referides a aquest focus. En el cas $\varepsilon = -1$, ens proposem expressar la branca de la hipèrbola (de les dues que hi

ha) més pròxima al focus $(c, 0)$, és a dir, la de la dreta, en coordenades polars referides a aquest focus. Per definició de coordenades polars (r, φ) , tindrem

$$\begin{cases} x - c = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (11.4)$$

Substituint a (11.3) els valors de (x, y) obtinguts a (11.4), tindrem

$$\frac{r^2 \cos^2 \varphi + c^2 + 2rc \cos \varphi}{a^2} + \varepsilon \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1.$$

Això ho podem escriure

$$r^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \varepsilon \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) + r \frac{2c}{a} \cos \varphi + (c^2 - a^2) = 0. \quad (11.5)$$

Això és una equació de segon grau en r , el discriminant de la qual és

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{4c^2}{a^2} \cos^2 \varphi - 4(c^2 - a^2) \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \varepsilon \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) = \\ &= \frac{4}{a^2} \cos^2 \varphi - 4\varepsilon(c^2 - a^2) \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} = \frac{4}{a^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{4}{a^2}. \end{aligned}$$

Aïllant r de l'equació (11.5), tindrem

$$r = \frac{-\frac{2c}{a} \cos \varphi \pm \frac{2}{a}}{2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \varepsilon \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right)}. \quad (11.6)$$

El denominador d'aquesta expressió, substituint $\sin^2 \varphi$ per $1 - \cos^2 \varphi$, s'escriu

$$2 \frac{\varepsilon}{b^2} (1 - e^2 \cos^2 \varphi).$$

Per tant, (11.6) s'escriurà

$$r = \frac{b^2 \varepsilon}{a} \cdot \frac{-e \cos \varphi \pm 1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi}. \quad (11.7)$$

Una vegada arribats aquí, estudiem per separat els casos de l'el·lipse i la hipèrbola. En el primer cas, $\varepsilon = 1$, $e < 1$, $1 - e^2 \cos^2 \varphi > 0$, i dels dos signes que afecten l'1 a l'expressió (11.7) no podem triar el negatiu ja que llavors r seria negatiu. Per tant, l'equació de l'el·lipse, en polars, serà

$$r = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1 - e \cos \varphi}{1 - e^2 \cos^2 \varphi} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1 - e \cos \varphi}{(1 - e \cos \varphi)(1 + e \cos \varphi)}.$$

És a dir,

$$r = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + e \cos \varphi}. \quad (11.8)$$

En el cas de la hipèrbola, $\varepsilon = -1$. Com que ens interessa la branca de la dreta, $\varphi = \pi/2$ ha de donar un punt d'aquesta branca. Per tant, dels dos signes que afecten l'1, a (11.7), haurem de triar el negatiu. Tindrem, doncs,

$$r = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1 + \cos \varphi}{1 - e^2 \cos^2 \varphi} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 - e \cos \varphi}, \quad (11.9)$$

equació que podem escriure

$$r = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + e \cos(\varphi - \pi)}. \quad (11.10)$$

Finalment, considerem la paràbola

$$x + ay^2 = 0, \quad a > 0. \quad (11.11)$$

Anomenem focus d'aquesta cònica el punt $(-1/4a, 0)$. Un càlcul anàleg al que hem fet abans mostra que l'equació (11.11), en coordenades polars d'origen el focus, és

$$r = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{1 + \cos \varphi}. \quad (11.12)$$

Ara estem en condicions de demostrar el resultat següent:

Teorema 11.1 *Sigui P un punt de $\mathbf{R}^2$ i s una semirecta d'origen P . Prenguem coordenades polars (r, φ) d'origen P , on φ representa l'angle, comptat des de la semirecta s en sentit contrari al de les agulles del rellotge. L'equació*

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \omega)}, \quad (11.13)$$

on p , e i ω són nombres reals tals que $p > 0$, $e \geq 0$, és l'equació d'una el·lipse si $e < 1$, d'una paràbola si $e = 1$ i d'una hipèrbola si $e > 1$. En tots aquests casos P és el focus de la cònica respectiva.

DEMOSTRACIÓ. Anomenem α l'angle entre l'eix de les x i la semirecta s . L'equació de l'el·lipse en les coordenades (r, φ) serà (11.8), però posant-hi $\varphi + \alpha$ en lloc de φ , és a dir,

$$r = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + e \cos(\varphi + \alpha)},$$

que és de la forma (11.13) amb $p = b^2/a$, $\omega = -\alpha$. La demostració en el cas de la hipèrbola i la paràbola és similar. ■

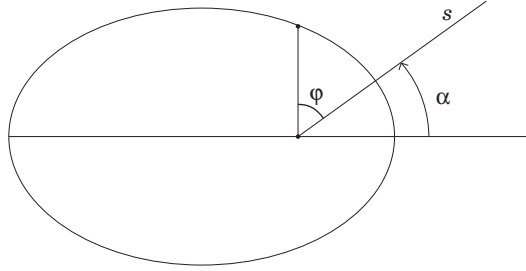


Figura 11.1

2 Llei de gravitació universal

Kepler, observant els moviments aparents dels planetes a la volta celest, havia formulat les seves conegudes lleis que descriuen els moviments reals d'aquests astres entorn del Sol. Newton va saber, però, partint d'aquelles lleis, obtenir-ne una altra de més general i molt més senzilla que explicava els moviments de planetes i satèl·lits en el sistema solar. Aquesta llei, que nosaltres acceptarem com a axioma, pot formular-se de la manera següent.

Siguin P_1 i P_2 dues partícules de masses respectives m_1 i m_2 , que es mouen lliurement a $\mathbf{R}^3$. Per a $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, P_i exerceix sobre P_j la força

$$\vec{F}_{ij} = \frac{K m_i m_j (\vec{p}_i - \vec{p}_j)}{\|\vec{p}_i - \vec{p}_j\|^3}, \quad (11.14)$$

on K és una constant denominada de gravitació universal i $\vec{p}_i$ indica el vector posició de la partícula P_i . Per a qualsevol parell de partícules P_1, P_2 , val (11.14) amb la mateixa constant K .

3 El problema dels dos cossos

L'anomenat problema dels dos cossos es pot enunciar així: tenim a $\mathbf{R}^3$ dues partícules, P_1 i P_2 , que es poden moure lliurement i sobre les quals només actua la força d'atracció que cada una d'elles exerceix sobre l'altra d'acord amb la llei de gravitació de l'apartat anterior. Es vol estudiar el moviment d'aquest sistema.

Com que els dos punts es poden moure lliurement a $\mathbf{R}^3$, el sistema té sis

graus de llibertat. Sigui

$$\vec{r} = \frac{m_1 \vec{p}_1 + m_2 \vec{p}_2}{m_1 + m_2}$$

el centre de masses del sistema. De l'expressió anterior es dedueix

$$\vec{p}_2 = \vec{r} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{p}_2 - \vec{p}_1). \quad (11.15)$$

Prenguem com a coordenades generalitzades les coordenades (X^1, X^2, X^3) del centre de masses $\vec{r}$ respecte a uns eixos rectangulars fixos, i les coordenades (x^1, x^2, x^3) de $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ referides als mateixos eixos. Les coordenades de $\vec{p}_2$ seran, en virtut de (11.15),

$$\left(X^i + \frac{m_1}{m_1 + m_2} x^i \right). \quad (11.16)$$

De manera anàloga, les coordenades de $\vec{p}_1$ seran

$$\left(X^i - \frac{m_2}{m_1 + m_2} x^i \right). \quad (11.17)$$

L'energia cinètica T del sistema serà

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \sum \left(\dot{X}^i - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{x}^i \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \sum \left(\dot{X}^i + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{x}^i \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \sum (\dot{X}^i)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sum (\dot{x}^i)^2. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Segons la llei de Newton, la força F_{21} que exerceix P_2 sobre P_1 és

$$\vec{F}_{21} = \frac{K m_1 m_2}{\|\vec{p}_2 - \vec{p}_1\|^3} (\vec{p}_2 - \vec{p}_1).$$

És a dir,

$$\vec{F}_{21} = \frac{K m_1 m_2}{(\sqrt{\sum (x^i)^2})^3} (x^1, x^2, x^3). \quad (11.19)$$

Anàlogament, la força $\vec{F}_{12}$ que P_1 exerceix sobre P_2 és $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Tenint en compte (11.16), (11.17) i (11.19), veiem que

$$\vec{F}_{21} \frac{\partial \vec{p}_1}{\partial x^i} + \vec{F}_{12} \frac{\partial \vec{p}_2}{\partial x^i} = - \frac{K m_1 m_2 x^i}{(\sqrt{\sum (x^i)^2})^3}$$

$$\vec{F}_{21} \frac{\partial \vec{p}_1}{\partial X^i} + \vec{F}_{12} \frac{\partial \vec{p}_2}{\partial X^i} = 0.$$

Veiem, doncs, que si prenem la funció

$$V(x^1, x^2, x^3) = \frac{-Km_1m_2}{\sqrt{\sum (x^i)^2}} \quad (11.20)$$

es compleix

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial x^i} = \vec{F}_{21} \cdot \frac{\partial \vec{p}_1}{\partial x^i} + \vec{F}_{12} \cdot \frac{\partial \vec{p}_2}{\partial x^i} \\ -\frac{\partial V}{\partial X^i} = \vec{F}_{21} \cdot \frac{\partial \vec{p}_1}{\partial X^i} + \vec{F}_{12} \cdot \frac{\partial \vec{p}_2}{\partial X^i} . \end{cases}$$

Segons el que hem vist a l'apartat 6 del capítol 8, V és la funció potencial del sistema. La funció L de Lagrange serà, doncs,

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \sum (\dot{X}^i)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \sum (\dot{x}^i)^2 + \frac{Km_1m_2}{\sqrt{\sum (x^i)^2}} . \quad (11.21)$$

Les equacions de Lagrange del sistema són, doncs,

$$\begin{cases} \ddot{X}^i = 0 \\ \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \ddot{x}^i = -\frac{\partial V}{\partial x^i} . \end{cases} \quad (11.22)$$

D'aquí deduïm, en primer lloc, que el centre de masses (X^1, X^2, X^3) es desplaça amb moviment rectilini uniform (o bé està en repòs). En segon lloc, el moviment de P_2 relatiu a P_1 és el mateix que si P_1 estigués fix a l'origen de coordenades i P_2 es mogués sota l'acció d'un camp de forces derivat del potencial

$$V'(m_2, x^1, x^2, x^3) = \frac{-K(m_1 + m_2)m_2}{\sqrt{\sum (x^i)^2}} . \quad (11.23)$$

Per tant, ara estudiarem el problema següent: moviment d'una partícula, a $\mathbf{R}^3$, de massa m_2 , sota l'acció d'un camp de forces derivat del potencial (11.23).

Òbviament, aquest problema és simètric respecte a rotacions entorn de qualsevol eix que passi per l'origen de coordenades. Això implica (vegeu capítol 9) que el moment de la quantitat de moviment respecte a l'origen de coordenades es manté constant al llarg del temps. Si $\vec{p}$ és el vector posició de la partícula i $\vec{P}$ és la quantitat de moviment, el vector $\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{P}$ es manté constant. $\vec{M}$ i $\vec{p}$ són perpendiculars. Això ens diu que $\vec{p}$ sempre es manté perpendicular a $\vec{M}$, que és un vector fix de $\mathbf{R}^3$. Per tant, la trajectòria de la partícula està continguda en un pla.

Per tal d'estudiar el moviment, situem-nos en aquest pla i prenguem coordenades polars (r, φ) . L'energia cinètica de la partícula serà

$$T = \frac{1}{2}m_2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

La funció potencial és

$$V = -\frac{K(m_1 + m_2)m_2}{r}.$$

Les equacions de Lagrange seran

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \\ \ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - \frac{K(m_1 + m_2)}{r^2}. \end{cases} \quad (11.24)$$

Integrant la primera, tenim

$$r^2\dot{\varphi} = h, \quad (11.25)$$

on h és una constant. Això es coneix com la llei de les àrees, de Kepler. Si $h = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ i la trajectòria és una recta. Suposem d'ara endavant que $h \neq 0$. Si volem l'equació de la trajectòria, podem substituir, a la segona equació de (11.24), d/dt per $(h/r^2)d/d\varphi$, deduïda de (11.25). Fent això, tenim

$$\frac{h}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) = \frac{h^2}{r^3} - \frac{K(m_1 + m_2)}{r^2},$$

que és l'equació diferencial que ens donarà r en funció de φ . Per simplificar, posem $u = 1/r$. Ens quedarà

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{K(m_1 + m_2)}{h^2}, \quad (11.26)$$

que és lineal amb coeficients constants. La solució general ve donada per

$$u = \frac{K(m_1 + m_2)}{h^2} \left(1 + e \cos(\varphi - \omega) \right),$$

on e i ω són constants d'integració. Podem suposar $e \geq 0$ a condició de modificar, si cal, ω . D'aquí obtenim

$$r = \frac{h^2}{K(m_1 + m_2)} \cdot \frac{1}{1 + e \cos(\varphi - \omega)}. \quad (11.27)$$

En virtut del teorema 11.1, això és l'equació, en polars, d'una cònica, un focus de la qual es pren com a origen. La cònica serà una el·lipse, paràbola o hipèrbola segons que $e < 1$, $e = 1$, ó bé $e > 1$. Les constants d'integració h , e i ω que apareixen a (11.27) es poden calcular totes a partir de la posició inicial i de la velocitat inicial de la partícula.

En el cas que la trajectòria sigui el·líptica, calcularem el període de la trajectòria, és a dir, el temps que s'inverteix a fer una volta sencera.

Segui O l'origen de coordenades, és a dir, un focus de l'el·lipse. Segui P la partícula que descriu l'el·lipse. Fixat un origen de temps, t_0 , designem per $A(t)$ l'àrea d'el·lipse compresa entre els segments $OP(t_0)$ i $OP(t)$. És clar que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{h}{2}. \quad (11.28)$$

Anomenem $\mathcal{T}$ el període de la trajectòria. Segui t_1 tal que $t_1 - t_0 = \mathcal{T}$. Integrant (11.28) entre t_0 i t_1 , tindrem

$$\pi ab = \frac{h}{2} \mathcal{T}. \quad (11.29)$$

Comparant (11.8) amb (11.27), tenim

$$\frac{b^2}{a} = \frac{h^2}{K(m_1 + m_2)},$$

d'on

$$h = \frac{b\sqrt{K(m_1 + m_2)}}{\sqrt{a}}. \quad (11.30)$$

Substituint a (11.29), tenim

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{K(m_1 + m_2)}}. \quad (11.31)$$

Això és la tercera llei de Kepler. Tal com la va enunciar ell,

$$\frac{a^3}{\mathcal{T}^2} = \frac{K(m_1 + m_2)}{4\pi^2}, \quad (11.32)$$

o sigui, $a^3/\mathcal{T}^2$ només depèn de les masses.

Encara no hem determinat, però, r i φ en funció del temps, per tal de saber en cada instant on es troba la partícula. Per fer això, podríem procedir de la

manera següent. L'energia $E = T + V$ s'ha de mantenir constant al llarg de les trajectòries. Aquesta energia és

$$E = \frac{1}{2}m_2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{K(m_1 + m_2)m_2}{r}. \quad (11.33)$$

Ara bé, com que $r^2\dot{\varphi} = h$, l'equació anterior s'escriu

$$E = \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{h^2}{r^2} - \frac{K(m_1 + m_2)m_2}{r}. \quad (11.34)$$

La constant E es pot calcular explícitament en funció de les característiques de l'òrbita. Suposem, per fixar les idees, que l'òrbita és el·líptica. Quan la partícula és el més prop possible de l'origen (que és un focus de l'el·lipse), $\dot{r} = 0$ (per definició de "més prop possible"). Llavors $r = a - c = a(1 - e)$. En aquell instant, E valdrà, segons (11.34),

$$E = m_2 \left(\frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2(1 - e)^2} - \frac{K(m_1 + m_2)}{a(1 - e)} \right).$$

Substituint h pel valor que hem trobat abans a (11.30), tenint en compte que $b = a\sqrt{1 - e^2}$, i operant, tenim

$$E = -\frac{K(m_1 + m_2)m_2}{2a}.$$

Substituint aquesta constant a (11.34), tenim l'equació diferencial

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{a(1 - e^2)K(m_1 + m_2)}{2r^2} - \frac{K(m_1 + m_2)}{r} = -\frac{K(m_1 + m_2)}{2a}.$$

Si per μ designem $K(m_1 + m_2)$, l'equació anterior es pot escriure

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} - \frac{a(1 - e^2)}{r^2}}\mu.$$

Les solucions d'aquesta equació diferencial ens donaran r en funció de t (i, per tant, φ en funció de t). L'equació anterior es pot escriure, multiplicant per r ,

$$r\dot{r} = \sqrt{2\mu r - \frac{\mu}{a}r^2 - a(1 - e^2)\mu}.$$

Fent el canvi de variables

$$r = a(1 - e \cos \alpha) \quad (11.35)$$

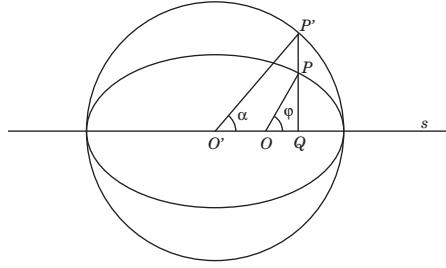


Figura 11.2

(després explicarem el significat geomètric d'aquest canvi), tindrem

$$\begin{aligned} a^2(1 - e \cos \alpha)e \sin \alpha \dot{\alpha} &= \sqrt{\mu a} \sqrt{2(1 - e \cos \alpha) - (1 - e \cos \alpha)^2 - (1 - e^2)} \\ &= (\text{operant}) = \sqrt{\mu a} e \sin \alpha. \end{aligned}$$

Aquesta equació es pot escriure

$$(1 - e \cos \alpha) \dot{\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

Recordem que en virtut de (11.32), $\sqrt{\mu/a^3} = 2\pi/\mathcal{T}$. La solució de l'equació anterior és

$$\alpha - e \sin \alpha = \frac{2\pi}{\mathcal{T}}(t - t_0). \quad (11.36)$$

L'equació (11.36) dóna α en funció de t , i, per (11.35), s'obté r en funció de t . L'equació (11.36), que va ser obtinguda per Kepler per altres procediments, es coneix com a “equació de Kepler”. No es pot, de manera explícita, aïllar α en funció de t . Aquesta va ser la primera equació transcendent de la història de la ciència.

Explicuem, ara, la significació geomètrica del canvi de variables (11.35) (vegeu la figura 11.2). Sigui O l'origen de coordenades (un focus de l'el·lipse). Sigui P la partícula que es troba sobre l'el·lipse. Sigui s l'eix major d'aquesta el·lipse, i O' el seu centre. Tracem per O' una circumferència de radi $a/2$, on a és la longitud de l'eix major. Projectem P sobre la circumferència en la direcció perpendicular a s . Sigui P' aquesta projecció. Segons les notacions que hem

utilitzat fins ara, l'angle de $\overline{PO}$ amb s és φ , i la longitud de $\overline{PO}$ és r . Doncs bé, α és l'angle de $\overline{P'O'}$ amb s . En efecte,

$$r^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2 = (\overline{O'Q} - c)^2 + \overline{QP}^2.$$

Però

$$\overline{QP} = \frac{b}{a} \overline{P'Q} = \frac{b}{a} \sin \alpha.$$

Resumint,

$$r^2 = (a \cos \alpha - c)^2 + b^2 \sin^2 \alpha.$$

Operant, s'obté (11.35).

L'angle φ , en mecànica celest, s'anomena anomalia vertadera, mentre que l'angle α s'anomena anomalia excèntrica. Abans, hem vist que

$$\begin{aligned} \overline{OQ} &= r \cos \varphi = a \cos \alpha - c = a(\cos \alpha - e) \\ \overline{QP} &= r \sin \varphi = b \sin \alpha. \end{aligned}$$

Substituint r pel seu valor donat a (11.35), s'obté

$$\begin{cases} \cos \varphi &= \frac{\cos \alpha - e}{1 - e \cos \alpha} \\ \sin \varphi &= \frac{\sin \alpha \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos \alpha}, \end{cases} \quad (11.37)$$

que ens dona φ en funció de α . Com que tenim α en funció del temps, tindrem φ en funció del temps.

Com que no es pot aïllar explícitament α en funció de t , a l'equació de Kepler (11.36), s'utilitzen desenvolupaments en sèrie. Una expressió útil, que no podem demostrar aquí, és la següent:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= M(t) + e \sin M(t) + \frac{e^2}{2} \sin 2M(t) + \\ &+ \frac{e^3}{8} (3 \sin 3M(t) - \sin M(t)) + \frac{e^4}{6} (2 \sin 4M(t) - \sin 2M(t)) + \dots, \end{aligned}$$

on $M(t)$ designa l'expressió $(2\pi/\mathcal{T})(t - t_0)$. Per a excentricitats petites, agafant els primers termes, s'obté una bona aproximació de $\alpha(t)$.

Capítol 12

Mecànica dels medis continus

1 Una fórmula de derivació d'integrals que depenen d'un paràmetre

Sigui U un obert de $\mathbf{R}^3$, I un interval obert de $\mathbf{R}$ de la forma $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, i φ una aplicació diferenciable $\varphi: U \times I \rightarrow \mathbf{R}^3$. Per a cada $t \in I$ designem per φ_t l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ x & \longmapsto & \varphi(x, t). \end{array}$$

Suposem que φ és tal que per a cada $t \in I$ φ_t és un difeomorfisme de U sobre $\varphi_t(U)$ i que φ_0 és la identitat. (Tot això es complirà, per exemple, si φ és un grup uniparamètric local de transformacions, però nosaltres, aquí, ens situem en unes hipòtesis una mica més generals.) Designem per $\vec{v}$ el camp vectorial sobre U donat en cada $x \in U$ pel vector tangent a la corba $t \rightarrow \varphi_t(x)$ en el punt $t = 0$.

Proposició 12.1 *Sigui V un obert contingut a U , i $F(x, t)$ una funció diferenciable definida a $V \times I$. Es compleix*

$$\left[\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(V)} F(x, t) dx \right]_{t=0} = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(F\vec{v}) \right)_{t=0} dx,$$

on dx indica l'element de volum de $\mathbf{R}^3$, $dx = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

DEMOSTRACIÓ. Com que $\varphi_0 = \operatorname{id}$, φ_t conserva l'orientació canònica de $\mathbf{R}^3$ per a tot t . Tindrem

$$\int_{\varphi_t(V)} F(x, t) dx = \int_V \varphi_t^*(F(x, t) dx).$$

Però $\varphi_t^*(F(x, t)dx) = F(\varphi_t(x), t)\varphi_t^*(dx) = F(\varphi_t(x), t)J_t(x)dx$, on $J_t(x)$ indica el jacobí de la transformació φ_t . Tindrem

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(V)} F(x, t)dx \right]_{t=0} &= \left[\frac{d}{dt} \int_V F(\varphi_t(x), t)J_t(x)dx \right]_{t=0} \\ &= \int_V \left(\frac{d}{dt} F(\varphi_t(x), t)J_t(x) \right)_{t=0} dx. \end{aligned}$$

Tenint en compte que $\varphi_0 = \text{id}$ i que $J_0(x) = 1$, tindrem

$$\left(\frac{d}{dt} F(\varphi_t(x), t)J_t(x) \right)_{t=0} = \sum_i \frac{\partial F(x, 0)}{\partial x^i} v^i + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t=0} + F(x, 0) \left(\frac{dJ_t(x)}{dt} \right)_{t=0}.$$

Calculem ara $\left(\frac{dJ_t(x)}{dt} \right)_{t=0}$. Per la regla de derivació de determinants, tindrem

$$\begin{aligned} \left(\frac{dJ_t(x)}{dt} \right)_{t=0} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial x^1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial v^2}{\partial x^1} & 1 & 0 \\ \frac{\partial v^3}{\partial x^1} & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial v^1}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v^3}{\partial x^2} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial v^1}{\partial x^3} \\ 0 & 1 & \frac{\partial v^2}{\partial x^3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial v^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \\ &= \sum \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = \text{div } \vec{v}. \end{aligned}$$

Tindrem, doncs,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} F(\varphi_t(x), t)J_t(x) \right)_{t=0} &= \sum \frac{\partial F(x, 0)}{\partial x^i} v^i + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t=0} + F(x, 0) \sum \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \text{div}(F\vec{v}) \right)_{t=0}. \end{aligned}$$

Això prova la proposició. ■

2 Equació de continuïtat d'un medi continu

Suposem que tenim un medi continu —un fluid, per exemple— en moviment, en una regió U de $\mathbf{R}^3$. Suposem que el moviment del medi és tal que existeix una aplicació diferenciable $\varphi: U \times I \rightarrow \mathbf{R}^3$ que compleix les condicions de l'apartat 1, de manera que la partícula del medi que a l'instant $t = 0$ ocupava la posició x , a l'instant t ocupa la posició $\varphi_t(x)$. Suposarem, a més, que existeix una

funció diferenciable $\rho(x, t)$ definida a $U \times I$ tal que la massa $m(V, t_0)$ del medi contingut en una regió mesurable $V \subset U$, a l'instant t_0 , ve donada per

$$m(V, t_0) = \int_V \rho(x, t_0) dx.$$

La funció $x \rightarrow \rho(x, t_0)$ s'anomena densitat del medi a l'instant t_0 . Fixem $x_0 \in U$. Sigui V_δ la bola de centre x_0 i radi δ . Quan δ és petit, $V_\delta \subset U$. Ara veurem que

$$\rho(x_0, t_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(V_\delta, t_0)}{\text{vol}(V_\delta)},$$

la qual cosa ens donarà una interpretació física de $\rho(x_0, t_0)$. En efecte,

$$\begin{aligned} \left| \frac{m(V_\delta, t_0)}{\text{vol}(V_\delta)} - \rho(x_0, t_0) \right| &= \left| \frac{1}{\text{vol}(V_\delta)} \int_{V_\delta} \rho(x, t_0) dx - \rho(x_0, t_0) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\text{vol}(V_\delta)} \int_{V_\delta} (\rho(x_0, t_0) + \rho(x, t_0) - \rho(x_0, t_0)) dx - \rho(x_0, t_0) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\text{vol}(V_\delta)} \int_{V_\delta} (\rho(x, t_0) - \rho(x_0, t_0)) dx \right| \leq M_\delta, \end{aligned}$$

on M_δ és el màxim de $|\rho(x, t_0) - \rho(x_0, t_0)|$ sobre V_δ , que tendeix a 0 quan $\delta \rightarrow 0$.

Teorema 12.2 (Equació de continuïtat) *Si $\vec{v}$ és el camp de velocitats en un instant t (que podem suposar que és l'instant $t = 0$), es compleix*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui V una regió de U . Les partícules del medi que a l'instant $t = 0$ ocupaven la regió V de U , a l'instant t ocuparan la regió $\varphi_t(V)$. Aquesta massa no canvia amb el temps (són les mateixes partícules!). Tindrem, doncs,

$$\left[\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(V)} \rho(x, t) dx \right]_{t=0} = 0.$$

En virtut de la proposició 12.1 de l'apartat anterior, tindrem

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right)_{t=0} dx = 0.$$

Com que això ha de complir-se per a qualsevol regió V de U , tindrem

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right)_{t=0} = 0. \quad \blacksquare$$

3 Quantitat de moviment d'una regió V . Força que actua sobre V

La quantitat de moviment del medi contingut en un instant t a la regió V de $\mathbf{R}^3$ es defineix com el vector

$$\vec{P}(V, t) = \int_V \rho(x, t) \vec{v}(x, t) dx,$$

on $\vec{v}(x, t)$ és el camp de velocitats de les partícules a l'instant t . Les partícules del medi que a l'instant $t = 0$ ocupaven una regió V , en cada instant t ocuparan la regió $\varphi_t(V)$. La quantitat de moviment d'aquestes partícules (que seran sempre les mateixes) a l'instant t serà $\vec{P}(\varphi_t(V), t)$. Es diu que el medi contingut a V a l'instant $t = 0$ està subjecte (en aquest instant) a la força

$$\vec{F}(V) = \left[\frac{d}{dt} \vec{P}(\varphi_t(V), t) \right]_{t=0}.$$

Això és la definició de força que actua sobre el medi a l'instant inicial. (Conseqüentment, tenim definida la força en qualsevol instant de temps, ja que qualsevol instant pot considerar-se l'instant inicial.)

Proposició 12.3 *Es compleix*

$$\vec{F}(V) = \int_V \rho(x, 0) \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{t=0} dx.$$

DEMOSTRACIÓ.

$$\vec{F}(V) = \left[\frac{d}{dt} \vec{P}(\varphi_t(V), t) \right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(V)} \rho(x, t) \vec{v}(x, t) dx \right]_{t=0}.$$

Prenguem una component qualsevol d'aquest vector. Tindrem

$$\begin{aligned} F^i(V) &= \left[\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(V)} \rho(x, t) v^i(x, t) dx \right]_{t=0} = (\text{per la proposició 12.1}) \\ &= \int_V \left(\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v^i \vec{v}) \right)_{t=0} dx. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Ara bé,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho v^i \vec{v}) &= \sum_j \frac{\partial(v^i \rho v^j)}{\partial x^j} = \sum_j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \rho v^j + v^i \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \\ &= (\text{per l'equació de continuïtat}) = \sum_j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \rho v^j - v^i \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned}$$

D'altra banda,

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} v^i + \rho \frac{\partial v^i}{\partial t}.$$

Per tant, el terme sota el signe integral de (12.1) és

$$\left(\rho \frac{\partial v^i}{\partial t} + \sum_j \rho \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} \right)_{t=0} = \left[\rho \frac{d}{dt} v^i(x, t) \right]_{t=0}$$

i la proposició queda demostrada. ■

4 Forces exteriors i forces de lligadura. Principi de Cauchy

Suposarem que el medi continu evoluciona sota l'acció d'un camp conegut de forces exteriors de manera que la força exterior $F_{\text{ext}}(V, t)$ que actua sobre una regió V del medi en un instant t ve donada per

$$\vec{F}_{\text{ext}}(V, t) = \int_V \vec{f}(x, y) dx,$$

on se suposa que $\vec{f}(x, t)$ depèn diferenciablement de x i t . El vector $\vec{f}(x, t)$ s'anomena densitat de força exterior a l'instant t . Tal com hem fet a l'apartat 2, fixat $x_0 \in U$, si anomenem V_δ la bola de centre x_0 i radi δ , es té

$$\vec{f}(x_0, t_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{\text{ext}}(V_\delta, t_0)}{\text{vol}(V_\delta)}.$$

Això dona una interpretació física del vector densitat de força exterior.

L'experiència ens diu que, generalment, el moviment $\varphi_t(V)$ del medi que a l'instant inicial ocupava la regió V no compleix

$$\vec{F}_{\text{ext}}(\varphi_t(V), t) = \frac{d}{dt} \vec{\mathcal{P}}(\varphi_t(V), t).$$

S'anomena força interna que actua sobre la regió $\varphi_t(V)$ a l'instant t la diferència

$$\frac{d}{dt} \vec{\mathcal{P}}(\varphi_t(V), t) - \vec{F}_{\text{ext}}(\varphi_t(V), t).$$

Si designem per $\vec{F}_{\text{int}}(\varphi_t(V), t)$ aquesta força, tindrem

$$\frac{d}{dt} \vec{\mathcal{P}}(\varphi_t(V), t) = \vec{F}(\varphi_t(V), t) = \vec{F}_{\text{int}}(\varphi_t(V), t) + \vec{F}_{\text{ext}}(\varphi_t(V), t), \quad (12.2)$$

on $\vec{F}(\varphi_t(V), t)$ indica la força total que actua sobre $\varphi_t(V)$ a l'instant t , definida a l'apartat 3 com a variació de la quantitat de moviment.

La força interna o de lligadura que actua sobre una regió V en un instant de temps és la força que la resta del medi exerceix sobre V . Si la regió V estigués aïllada completament, de tal manera que fora de V no hi hagués medi (si V fos per exemple una gota d'aigua en el buit), llavors la força interna que actua sobre V seria nul·la.

La intuïció ens diu que la força interna s'exerceix sobre V a través de la vora de V , ∂V . Això ho expressarem matemàticament en el següent principi degut a Cauchy.

Principi de Cauchy. Designem per S^2 el conjunt de vectors unitaris de $\mathbf{R}^3$. Existeix una aplicació diferenciable

$$\begin{array}{ccc} U \times S^2 \times I & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, \vec{u}, t) & \longmapsto & T(x, \vec{u}, t) \end{array}$$

tal que per a tota regió $V \subset U$ de vora diferenciable i també per a tot tetràedre $V \subset U$ (malgrat que la vora d'un tetràedre no és diferenciable), la força de lligadura $\vec{F}_{\text{int}}(V, t)$ ve donada per

$$\vec{F}_{\text{int}}(V, t) = \int_{\partial V} \vec{T}(x, \vec{n}(x), t) ds,$$

on, per a cada $x \in \partial V$, $\vec{n}(x)$ indica el vector normal unitari exterior a ∂V , i ds l'element d'àrea de ∂V . Quan V és un tetràedre, encara que $\vec{n}(x)$ no està definit sobre les arestes, la integral anterior té sentit. Se suposa, a més, que $\vec{T}$ compleix la condició següent: $T(x, \vec{u}, t) = -T(x, -\vec{u}, t)$.

Fixat un punt $x \in U$ i una direcció $\vec{u} \in S^2$, sigui s un petit entorn de x en un pla que passi per x i tingui $\vec{u}$ com a vector normal. $T(x, \vec{u}, t)$ indica, intuïtivament, la força interna que exerceix a través de s (quan s és petit) la part del fluid del costat del pla cap a on el vector $\vec{u}$ apunta, sobre la part del fluid situada a l'altre costat del pla. Per tant, la condició $T(x, \vec{u}, t) = -T(x, -\vec{u}, t)$ és del tot intuïtiva.

El vector $\vec{T}(x, \vec{u}, t)$ donat pel principi de Cauchy (que de moment només està definit per als $\vec{u} \in S^2$) es pot estendre a tots els vectors $\vec{u}$ de $\mathbf{R}^3$ mitjançant la definició següent:

$$T(x, \vec{u}, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u} = 0 \\ \|\vec{u}\| T\left(x, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, t\right) & \text{si } \vec{u} \neq 0. \end{cases}$$

El següent teorema degut a Cauchy és essencial per a la utilització de T .

Teorema 12.4 (Teorema de Cauchy) $\vec{T}(x, \vec{u}, t)$ depèn linealment de $\vec{u}$.

Per tal de demostrar el teorema necessitem prèviament el lema següent:

Lema 12.5 Fixat $x_0 \in U$, sigui V_δ , un tetràedre que contingui x_0 i contingut a la bola $B(x_0, k\delta)$ de centre x_0 i radi $k\delta$, on k és una constant positiva donada. Sigui $l(\delta) = \sqrt[3]{\text{vol}(V_\delta)}$. Es compleix

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} l(\delta)^{-2} \int_{V_\delta} T(x, \vec{n}(x), t) ds = 0.$$

(El lema val per a regions molt més generals que tetràedres.)

DEMOSTRACIÓ. Si $\vec{v}$ indica el camp de velocitats del medi a l'instant t , comencem provant que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} l(\delta)^{-2} \int_{V_\delta} \rho(x, t) \frac{d\vec{v}}{dt} dx = 0.$$

En efecte,

$$\left\| \int_{V_\delta} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dx \right\| \leq \text{vol}(V_\delta) \cdot \text{Màxim sobre } \overline{B(x_0, k\delta)} \text{ de } \left\| \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right\|.$$

Recordem que $\text{vol}(V_\delta) = l(\delta)^3$. Llavors

$$\left\| l(\delta)^{-2} \int_{V_\delta} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dx \right\| \leq K l(\delta),$$

on K és una certa constant positiva. El mateix argument demostra que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} l(\delta)^{-2} \int_{V_\delta} \vec{f}(x, t) dx = 0.$$

Ara bé, com que per definició de força interna es compleix

$$F(V_\delta, t) = \int_{V_\delta} \rho \frac{dv}{dt} dx = \underbrace{\int_{V_\delta} \vec{f}(x, t) dx}_{F_{\text{ext}}(V_\delta, t)} + \underbrace{\int_{\partial V_\delta} T(x, \vec{n}(x), t) ds}_{F_{\text{int}}(V_\delta, t)},$$

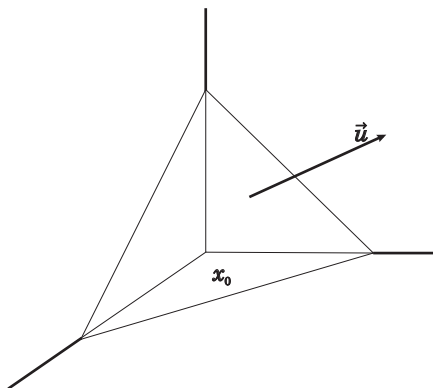


Figura 12.1

el lema queda demostrat. ■

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA. Fixem $x_0 \in U$, $\vec{u} \in S^2$ i $t_0 \in I$. Suposem, de moment, que $\vec{u}$ no és paral·lel a cap dels plans de coordenades. És a dir, $\vec{u} = (u^1, u^2, u^3)$, amb $u^i \neq 0$ per a tot i . Designem per V_δ el tetràedre que té per vèrtexs $x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$, $(x_0^1 + \delta/u^1, x_0^2, x_0^3)$, $(x_0^1, x_0^2 + \delta/u^2, x_0^3)$, $(x_0^1, x_0^2, x_0^3 + \delta/u^3)$. La cara d'aquest tetràedre no paral·lela a cap dels plans de coordenades té per equació $u^1(x^1 - x_0^1) + u^2(x^2 - x_0^2) + u^3(x^3 - x_0^3) = \delta$, que té $\vec{u}$ com a vector normal exterior. Designem per $C_{\vec{u}}(\delta)$ aquesta cara. Si suposem, per fixar les idees, que $u^1 > 0$, $u^2 > 0$, $u^3 > 0$, els vectors normals unitaris exteriors a les altres cares seran $-e_1, -e_2, -e_3$ (on e_1, e_2, e_3 indica la base canònica de $\mathbf{R}^3$). Anomenem $C_{-e_i}(\delta)$, $i = 1, 2, 3$, aquestes cares. Prenguem δ prou petit perquè $V_\delta \subset U$. Tindrem

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_\delta} T(x, \vec{n}(x), t_0) ds &= \int_{C_{\vec{u}}(\delta)} T(x, \vec{u}, t_0) ds + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \int_{C_{-e_i}(\delta)} T(x, -e_i, t_0) ds. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Per a cada $x \in C_{\vec{u}}(\delta)$ posem

$$T(x, \vec{u}, t_0) = T(x_0, \vec{u}, t_0) + (T(x, \vec{u}, t_0) - T(x_0, \vec{u}, t_0)). \quad (12.4)$$

Anàlogament, per a $x \in C_{-e_i}(\delta)$ posem

$$T(x, -e_i, t_0) = T(x_0, -e_i, t_0) + (T(x, -e_i, t_0) - T(x_0, -e_i, t_0)). \quad (12.5)$$

Si designem per $\Omega_u(\delta)$ l'àrea de la cara $C_u(\delta)$ i per $\Omega_{-e_i}(\delta)$ l'àrea de $C_{-e_i}(\delta)$, es tindrà

$$\Omega_{-e_i}(\delta) = u^i \Omega_{\vec{u}}(\delta).$$

Tenint en compte això i substituint a (12.3) les expressions (12.4) i (12.5), tindrem

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_\delta} T(x, \vec{n}(x), t_0) ds &= \\ &= T(x_0, \vec{u}, t_0) \Omega_u(\delta) + \sum_{i=1}^3 u^i T(x_0, -e_i, t_0) \Omega_u(\delta) + \dots, \end{aligned} \quad (12.6)$$

on els punts suspensius indiquen els termes provinents de les diferències $T(x, \dots) - T(x_0, \dots)$ de (12.4) i (12.5). Els termes corresponents als punts suspensius seran doncs de l'ordre $l(\delta)^3$, on $l(\delta)^3$ indica el volum de V_δ . (Això vol dir que, dividits per $l(\delta)^2$, tendeixen a zero quan $\delta \rightarrow 0$.) Per tant, multiplicant (12.6) per $l(\delta)^{-2}$ i fent tendir δ a zero, tindrem

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} l(\delta)^{-2} \int_{\partial V_\delta} \vec{T}(x, \vec{n}(x), t_0) ds &= \left(T(x_0, \vec{u}, t_0) + \right. \\ &+ \left. \sum u^i T(x_0, \vec{e}_i, t_0) \right) \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Omega_u(\delta)}{l(\delta)^2}. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Ara bé, $\Omega_u(\delta) = \delta^2 / (2u^1 u^2 u^3)$ i $l(\delta) = \delta / \sqrt{6u^1 u^2 u^3}$. Per tant, $\Omega_u(\delta) / l(\delta)^2$ no depèn de δ i el límit $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_u(\delta) / l(\delta)^2$ és no nul. Ara bé, en virtut del lema,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} l(\delta)^{-2} \int_{\partial V_\delta} T(x, \vec{n}(x), t_0) ds = 0.$$

Per tant, de (12.7) deduïm

$$T(x_0, \vec{u}, t_0) - \sum u^i T(x_0, \vec{e}_i, t_0) = 0. \quad (12.8)$$

Fins ara hem estudiat el cas $u^i > 0$ per a tot i . Els altres casos corresponents a $u^i \neq 0$ per a tot i es resolen de manera similar. En el cas que algun dels u^i sigui nul, se segueix també (12.8) per continuïtat. Això prova el teorema. ■

Recordem que si E és un espai vectorial de dimensió finita, l'espai $\mathcal{L}(E, E)$ d'aplicacions lineals de E en E s'identifica de manera canònica amb $E^* \otimes E$. Així doncs, l'aplicació lineal (en virtut del teorema) $\vec{u} \rightarrow \vec{T}(x, \vec{u}, t)$ dóna un tensor una vegada covariant i una vegada contravariant. Per a cada $t \in I$ tenim d'aquesta manera un camp tensorial (1,1) sobre U que s'anomena *tensor de les tensions*.

5 Equacions del moviment

L'equació (12.2) del moviment $\varphi_t(V)$ de V s'escriu, a l'instant $t = 0$,

$$\int_V \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{t=0} dx = \int_{\partial V} \vec{T}(x, \vec{n}(x), 0) ds + \int_V \vec{f}(x, 0) dx. \quad (12.9)$$

Com que $\vec{T}(x, \vec{u}, t)$ depèn linealment de $\vec{u}$, es tindrà $T^j(x, \vec{u}, t) = \sum u^i T_i^j(x, t)$. Per a cada $j = 1, 2, 3$, anomenem $\vec{Y}^j$ el vector de $\mathbf{R}^3$ donat per

$$\vec{Y}^j(x, t) = \left(T_1^j(x, t), T_2^j(x, t), T_3^j(x, t) \right).$$

Observem que $T^j(x, \vec{u}, t) = \sum u^i T_i^j(x, t) = g(\vec{u}, \vec{Y}^j(x, t))$, on g és el producte escalar euclidià de $\mathbf{R}^3$. La j -èsima component del primer terme del segon membre de (12.9) serà, doncs,

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} T^j(x, \vec{n}(x), 0) ds &= \int_{\partial V} g(\vec{n}(x), \vec{Y}^j(x, 0)) ds = (\text{pel teorema de} \\ \text{la divergència}) &= \int_V \operatorname{div} \vec{Y}^j(x, 0) dx = \int_V \left(\sum_k \frac{\partial T_k^j(x, 0)}{\partial x^k} \right) dx. \end{aligned}$$

Considerem l'isomorfisme $\#: T_x(\mathbf{R}^3)^* \rightarrow T_x(\mathbf{R}^3)$ donat per la mètrica euclidiana. Aquest isomorfisme ens permet identificar els tensors covariants amb els contravariants. El tensor T de components (T_k^j) s'identifica amb el tensor dues vegades contravariant de components (T^{kj}) donades per $T^{ij} = g^{ik} T_k^j = T_i^j$ (ja que $g_{ij} = \delta_{ij}$). Tenint en compte la definició de divergència d'un tensor que hem donat al capítol 5, el vector que té com a j -èsima component

$$\sum_k \frac{\partial T_k^j(x, 0)}{\partial x^k}$$

no és altre que $\operatorname{div} T(x, 0)$ (on aquí T significa un tensor dues vegades contravariant). L'equació (12.9) s'escriurà, doncs, en aquest llenguatge,

$$\int_V \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{t=0} dx = \int_V \operatorname{div} T(x, 0) dx + \int_V \vec{f}(x, 0) dx. \quad (12.10)$$

Com que això s'ha de complir per a tota regió V , es tindrà

$$\rho(x, 0) \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{t=0} = \operatorname{div} T(x, 0) + \vec{f}(x, 0).$$

Com que l'instant inicial pot ser qualsevol, es tindrà

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\text{div}} T + \vec{f}, \quad (12.11)$$

on T és el tensor de tensions. Aquesta és l'equació de Cauchy del moviment.

Un fluid es diu perfecte si existeix una funció $p(x, t)$ tal que $\vec{T}(x, \vec{u}, t) = -p(x, t)\vec{u}$; és a dir, si les forces internes que actuen sobre cada regió V ho fan només en la direcció normal de ∂V en cada punt. (És a dir, si no hi ha forces tangencials.) La funció p es diu pressió interna del fluid. En aquest cas, T és el tensor dues vegades contravariant de components $-p g^{ij}$ (en el nostre cas $g^{ij} = \delta_{ij}$). Això ho expressarem així: $T = -pg$.

Escrivim ara l'equació (12.11) en el cas d'un fluid perfecte. Prenguem la i -èssima component de $\rho d\vec{v}/dt$ del primer membre de (12.11). Tenint en compte que v^i depèn de x i de t , tindrem

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \rho \frac{\partial v^i}{\partial t} + \rho \sum_k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} v^k. \quad (12.12)$$

D'altra banda, $\vec{\text{div}} T$ serà, en el cas d'un fluid perfecte, el vector de components $-\partial p / \partial x^i$. L'equació (12.11) s'escriurà

$$\rho \frac{\partial v^i}{\partial t} + \rho \sum_k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} v^k = -\frac{\partial p}{\partial x^i} + f^i, \quad (12.13)$$

o, d'una manera més clàssica

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_k v^k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x^k} = \frac{1}{\rho} (-\vec{\text{grad}} p + \vec{f}). \quad (12.14)$$

De cara a la seva interpretació en relativitat, ens convé escriure l'equació del moviment d'una altra manera equivalent. Sumem i restem el terme $(\partial \rho / \partial t) v^i$ al segon membre de (12.12). Tindrem

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv^i}{dt} &= \rho \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v^i - \frac{\partial \rho}{\partial t} v^i + \rho \sum_k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} v^k \\ &= \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial t} v^i + \rho \sum_k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} v^k = (\text{per l'equació de conti-} \\ \text{nuitat}) &= \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho v^k) v^i + \rho \sum_k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} v^k \\ &= \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho v^k v^i). \end{aligned}$$

L'equació (12.11) s'escriurà, doncs,

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v} \otimes \vec{v} - T) = \vec{f}. \quad (12.15)$$

En el cas d'un fluid perfecte, tindrem

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v} \otimes \vec{v} + pg) = \vec{f}. \quad (12.16)$$

Capítol 13

Electromagnetisme

1 Electrostàtica

1.1 Camp elèctric

És ben conegut des de molt antic que alguns cossos, com l'ambre, l'ebonita o el vidre, en ser fregats amb un drap adquireixen la propietat d'atreure cossos lleugers, com ara trossets de paper. Aquesta propietat de l'ambre va ser descoberta per Thales i ha donat nom a l'electricitat, ja que ambre, en grec, és *elektron*.

Si es frega, per exemple, una barra d'ebonita amb un drap de llana i s'acosta, després, a un pèndol elèctric format per una petita bola de medul·la de saüc suspesa d'un fil de seda, veurem que la bola, primer, és atreta i, una vegada en contacte amb la barra, repel·lida. Si s'acosta ara al pèndol una barra de vidre fregada amb un drap de llana, el pèndol és atret. Es diu que la barra d'ebonita està electritzada i carregada negativament, mentre que la de vidre ho està positivament. L'experiència demostra que les substàncies que en ser fregades per un drap presenten propietats anàlogues a les descrites es divideixen en dues classes, que s'anomenen positiva (tenen propietats anàlogues al vidre) i negativa (substàncies que tenen les mateixes propietats que l'ebonita). Dues substàncies de la mateixa classe es repel·leixen i dues de classe contrària s'atreuen.

Considerem una barra de vidre, per exemple, fregada amb un drap. Acostem-hi un cos puntual, electritzat, C_1 , a una distància determinada d . Sigui P el punt de l'espai on situem el cos C_1 . Mesurem la força f_1 amb què C_1 és repel·lit per la barra de vidre (si és atret, canviem el signe de f_1). Apartem el cos C_1 i situem un altre cos electritzat C_2 en el mateix punt P on es trobava abans C_1 . Sigui f_2 la força amb què C_2 és repel·lit per la barra de vidre. L'experiència demostra que f_1 i f_2 tenen la mateixa direcció, $f_1 = \lambda f_2$, amb λ

escalar. L'experiència també demostra que λ no depèn del punt P de l'espai on situem successivament C_1 i C_2 per mesurar f_1 i f_2 (aquestes dues forces, però, sí que depenen de P). Prenent un cos "positiu" arbitrari, C_2 , com a unitat, l'escalar λ tal que $f_1 = \lambda f_2$ s'anomena càrrega elèctrica de C_1 .

Coulomb va establir que la força d'atracció o repulsió entre dos cossos puntuals electritzats és directament proporcional a les seves càrregues i inversament proporcional al quadrat de la distància que els separa. La força té, a més, la direcció de la recta que uneix els dos cossos. Si un cos de càrrega q està situat en un punt P de l'espai i un altre cos de càrrega q' està situat a P' , la força $\vec{F}$ que exerceix el primer sobre el segon és, segons Coulomb,

$$\vec{F} = k \frac{qq'}{r^3} \vec{r},$$

on $\vec{r} = \vec{P}' - \vec{P}$ i $r = \|\vec{r}\|$.

La constant k és universal i depèn, només, del medi on es realitza l'experiment. Es poden definir les unitats de tal manera que k valgui 1 en el buit. Per exemple, el coulomb estàtic es defineix com la unitat de la càrrega que exerceix una força d'una dina sobre una altra càrrega igual situada a 1 centímetre de distància.

El camp elèctric $\vec{E}$ creat per una càrrega q es defineix com la força que s'exerceix en cada punt, per la càrrega q , sobre la unitat de càrrega situada en aquell punt. És a dir,

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r}. \quad (13.1)$$

(Hem pres les unitats de manera que $k = 1$.)

Tal com vam veure al capítol 7, es diu que $\vec{E}$ deriva d'un potencial V si existeix una funció V tal que $E = -\text{grad } V$. Suposem que la càrrega q està situada en un punt ξ de l'espai. Llavors, òbviament, la funció

$$V(x) = \frac{q}{r(x, \xi)}, \quad (13.2)$$

on $r(x, \xi)$ és la distància entre x i ξ , és la funció potencial. Observem que $V(x)$ està definida a tot arreu, llevat del punt $x = \xi$.

1.2 Camp elèctric i potencial creat per un cos continu

Les fórmules (13.1) i (13.2) fan referència al camp i potencial creats per una càrrega puntual. Suposem ara que tenim un cos K no puntual amb una distribució de càrregues elèctriques donada per una funció densitat de càrrega σ , de

manera que la càrrega d'una regió D qualsevol d'aquest cos vingui donada per

$$Q(D) = \int_D \sigma(x) dx,$$

on $dx = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ és l'element de volum. Això és similar al concepte de densitat de massa descrit al capítol 12. Per analogia amb els cossos puntuals, el camp elèctric E creat per aquest cos en un punt x de l'espai serà

$$\vec{E}(x) = \int_K \sigma(\xi) \frac{\vec{x} - \vec{\xi}}{r(x, \xi)^3} d\xi, \quad (13.3)$$

on $r(x, \xi) = \|\vec{x} - \vec{\xi}\|$.

Observem que la funció sota el signe integral presenta una singularitat quan $x = \xi$. En primer lloc, per tant, ens hauríem d'assegurar que la integral anterior és convergent. Les proposicions següents estan encaminades a l'estudi d'integrals d'aquest tipus.

Proposició 13.1 *Segui $x \in \mathbf{R}^3$, i $B(x, \rho)$ la bola oberta de centre x i radi ρ . Designem per $r(x, \xi)$ la distància euclidiana entre x i ξ . Segui λ un nombre real positiu. La integral*

$$I = \int_{B(x, \rho)} \frac{d\xi}{r(x, \xi)^\lambda}$$

és convergent quan $\lambda < 3$ i divergent quan $\lambda \geq 3$.

DEMOSTRACIÓ. Considerem x fix i ξ variable. Fem el següent canvi de coordenades (pas a coordenades esfèriques):

$$\begin{cases} \xi^1 - x^1 &= r \cos \theta \cos \psi \\ \xi^2 - x^2 &= r \cos \theta \sin \psi \\ \xi^3 - x^3 &= r \sin \theta. \end{cases}$$

Tindrem $d\xi = d\xi^1 \wedge d\xi^2 \wedge d\xi^3 = r^2 \cos \theta dr \wedge d\psi \wedge d\theta$.

Tindrem

$$\begin{aligned} I &= \int_{B(x, \rho)} \frac{d\xi^1 \wedge d\xi^2 \wedge d\xi^3}{r^\lambda} = 2\pi \int_0^\rho r^{2-\lambda} dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \\ &= 4\pi \int_0^\rho r^{2-\lambda} dr = 4\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\rho r^{2-\lambda} dr. \end{aligned}$$

Si $\lambda \neq 3$ es té

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi}{2 - \lambda + 1} (\rho^{2-\lambda+1} - \varepsilon^{2-\lambda+1}).$$

Si $\lambda = 3$ es té

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi (\log \rho - \log \varepsilon) .$$

Per tant, quan $\lambda \geq 3$, com que aquests límits són infinits, la integral no és convergent. Si $\lambda < 3$ es té

$$I = \frac{4\pi}{3 - \lambda} \rho^{3-\lambda} . \quad \blacksquare$$

Com a corollari de la proposició podem veure que la integral (13.3) que defineix el camp elèctric és convergent. En efecte, la i -èssima component del vector E és

$$E^i(x) = \int_K \sigma(\xi) \frac{x^i - \xi^i}{r(x, \xi)} \frac{1}{r(x, \xi)^2} d\xi .$$

La funció $F(x, \xi) = (x^i - \xi^i)/r(x, \xi)$ està acotada en valor absolut. Sigui ρ un nombre real qualsevol. Tindrem

$$|E^i(x)| \leq C \int_{K \cap B(x, \rho)} \frac{d\xi}{r(x, \xi)^2} + C \int_{K \cap {}^c B(x, \rho)} \frac{d\xi}{r(x, \xi)^2} ,$$

on C és una cota sobre la regió K de la funció $\sigma(\xi)F(x, \xi)$ i ${}^c B(x, \rho)$ indica el complementari de la bola $B(x, \rho)$. La primera integral és convergent en virtut de la proposició anterior i la segona està acotada per (C/ρ^2) vol (K) ja que quan $\xi \notin B(x, \rho)$ es té

$$\frac{1}{r(x, \xi)^2} \leq \frac{1}{\rho^2} .$$

Per treballar amb més comoditat suposarem, d'ara endavant, que la funció densitat de càrrega σ està definida a tot $\mathbf{R}^3$, és C^∞ i té suport compacte. Amb aquestes hipòtesis la fórmula (13.3) esdevindrà

$$\vec{E}(x) = \int_{\mathbf{R}^3} \sigma(\xi) \frac{\vec{x} - \vec{\xi}}{r(x, \xi)^3} d\xi , \quad (13.4)$$

ja que σ s'anul·la fora d'una certa regió compacta K de $\mathbf{R}^3$ i tant se val, llavors, prendre la integral sobre K com prendre-la sobre tot $\mathbf{R}^3$.

Amb aquestes hipòtesis sobre σ provarem la proposició següent:

Proposició 13.2 *Sigui*

$$V(x) = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\sigma(\xi)}{r(x, \xi)} d\xi . \quad (13.5)$$

La integral anterior és convergent, la funció que defineix és derivable i les seves derivades, $\partial V/\partial x^\alpha$, s'obtenen derivant sota el signe integral:

$$\frac{\partial V}{\partial x^\alpha} = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{1}{r(x, \xi)} \right) \sigma(\xi) d\xi.$$

DEMOSTRACIÓ. El fet que la integral de (13.5) sigui convergent és conseqüència immediata de la proposició 13.1. Siguin ara K i K' dues boles compactes tals que $K' \subset \overset{\circ}{K}$ i que K' contingui el suport de σ . Es té

$$V(x) = \int_{K'} \frac{\sigma(\xi)}{r(x, \xi)} d\xi = \int_K \frac{\sigma(\xi)}{r(x, \xi)} d\xi.$$

Si $x \notin \overset{\circ}{K}$, com que la funció $\sigma(\xi)/r(x, \xi)$ està acotada quan $\xi \in K'$, no hi ha cap dificultat a derivar sota el signe integral. Provem el teorema per als $x \in \overset{\circ}{K}$. Prenguem ρ tal que $B(x, \rho) \subset K$ i considerem

$$V_\rho(x) = \int_{K-B(x, \rho)} \frac{\sigma(\xi)}{r(x, \xi)} d\xi.$$

Tindrem $V(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} V_\rho(x)$.

Calculem la derivada $\partial V_\rho(x)/\partial x^\alpha$. Com que derivem una integral amb domini variable (dependent de x), haurem d'aplicar la fórmula de la proposició 12.1 del capítol 12. Tindrem

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\rho(x)}{\partial x^\alpha} &= \int_{K-B(x, \rho)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{1}{r(x, \xi)} \right) \sigma(\xi) d\xi + \int_{\partial K} \frac{\sigma(\xi)}{r(x, \xi)} d\xi_\alpha - \\ &- \int_{\partial B(x, \rho)} \frac{\sigma(\xi)}{r(x, \xi)} d\xi_\alpha, \end{aligned}$$

on $d\xi_\alpha = i(\partial/\partial x^\alpha) d\xi$ restringit a la vora $= n^\alpha ds$, on $\vec{n}$ és el vector unitari normal exterior a la vora. Com que σ s'anul·la a ∂K , la integral $\int_{\partial K}$ s'anul·larà. Per calcular la integral $\int_{\partial B(x, \rho)}$ posem $\xi = \rho\omega$, $ds = \rho^2 d\omega$, on $d\omega$ és l'element d'àrea de l'esfera unitat. Tindrem

$$\int_{\partial B(x, \rho)} \frac{\sigma(\xi)}{r(x, \xi)} d\xi_\alpha = \rho \int_{\omega \in S^2} \sigma(\rho\omega) n^\alpha d\omega,$$

integral que tendeix a zero quan $\rho \rightarrow 0$. Per tant,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial V_\rho(x)}{\partial x^\alpha} = \int_K \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{1}{r(x, \xi)} \right) \sigma(\xi) d\xi = \int_K \frac{\xi^\alpha - x^\alpha}{r(x, \xi)} \cdot \frac{\sigma(\xi)}{r(x, \xi)^2} d\xi.$$

Anomenem $F_\alpha(x)$ a aquesta última integral. La convergència de $\partial V_\rho/\partial x^\alpha$ cap a F_α és uniforme ja que

$$\begin{aligned} \left| F_\alpha(x) - \frac{\partial V_\rho}{\partial x^\alpha} \right| &\leq \left| \int_{B(x,\rho)} \frac{\xi^\alpha - x^\alpha}{r(x,\xi)} \cdot \frac{\sigma(\xi)}{r(x,\xi)^2} d\xi \right| + \left| \rho \int_{\omega \in S^2} \sigma(\rho\omega) n^\alpha d\omega \right| \leq \\ &\leq M(\text{Vol } B(x,\rho) + \rho), \end{aligned}$$

on M és una constant. Això ens assegura que $V(x)$ és derivable i que

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x^\alpha} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial V_\rho(x)}{\partial x^\alpha} = F_\alpha(x). \quad \blacksquare$$

Corol·lari 13.3 $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$. Per tant, la funció V definida per (13.5) és la funció potencial del camp $\vec{E}$.

Proposició 13.4 $\partial V/\partial x^\alpha$ és derivable respecte a x^α i es té

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial (x^\alpha)^2} = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\xi^\alpha - x^\alpha}{r(x,\xi)} \cdot \frac{\sigma(\xi)}{r(x,\xi)^2} \right) d\xi - \sigma(x) \int_{\omega \in S^2} (\omega^\alpha)^2 d\omega, \quad (13.6)$$

i la integral sobre $\mathbf{R}^3$ que figura a la identitat anterior és convergent.

DEMOSTRACIÓ. Siguen K i K' dues boles compactes tals que K' contingui el suport de σ i $K' \subset K$. Per la proposició anterior es té

$$\frac{\partial V}{\partial x^\alpha} = \int_K \frac{\xi^\alpha - x^\alpha}{r(x,\xi)} \cdot \frac{\sigma(\xi)}{r(x,\xi)^2} d\xi = \int_{K'} \frac{\xi^\alpha - x^\alpha}{r(x,\xi)} \cdot \frac{\sigma(\xi)}{r(x,\xi)^2} d\xi.$$

Si $x \notin \overset{\circ}{K}$ les funcions sota el signe integral estan acotades i no hi ha cap dificultat a derivar sota el signe integral. D'altra banda, si $x \notin \overset{\circ}{K}$, com que $\sigma(x) = 0$, es complirà òbviament (13.6). Provem doncs aquesta identitat quan $x \in \overset{\circ}{K}$. Escrivim, per abreujar, $F(x,\xi) = (\xi^\alpha - x^\alpha)/r(x,\xi)$. Sigui ρ un nombre real positiu tal que $B(x,\rho) \subset K$. Posem

$$I_\rho = \int_{K-B(x,\rho)} \frac{F(x,\xi)}{r(x,\xi)^2} \sigma(\xi) d\xi.$$

Calculem $\partial I_\rho/\partial x^\alpha$. Com que derivem una integral en què el domini i l'integrand varien, aplicant la proposició 12.1 del capítol 12 tindrem

$$\frac{\partial I_\rho}{\partial x^\alpha} = \int_{K-B(x,\rho)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{F(x,\xi)}{r(x,\xi)^2} \right) \sigma(\xi) d\xi - \int_{\partial B(x,\rho)} \frac{F(x,\xi)}{r(x,\xi)^2} \sigma(\xi) d\xi_\alpha, \quad (13.7)$$

on $d\xi_\alpha = n^\alpha d\xi$, com a la proposició anterior. Ara bé, aquí, a diferència de la proposició anterior, no és gens clar que la primera integral $\int_{K-B(x,\rho)}$ sigui convergent quan $\rho \rightarrow 0$, ja que en derivar $1/r^2$ quedarà una r^3 al denominador. Per veure si aquesta integral és convergent o no, n'haurem de fer un estudi més profund. Tindrem

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_\rho}{\partial x^\alpha} &= \sigma(x) \int_{K-B(x,\rho)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{F}{r^2} \right) d\xi - \sigma(x) \int_{\partial B(x,\rho)} \frac{F}{r^2} d\xi_\alpha + \\ &+ \int_{K-B(x,\rho)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{F}{r^2} \right) (\sigma(\xi) - \sigma(x)) d\xi - \int_{\partial B(x,\rho)} \frac{F}{r^2} (\sigma(\xi) - \sigma(x)) d\xi_\alpha. \end{aligned}$$

Anomenem I_1 , I_2 , I_3 i I_4 les quatre últimes integrals amb el signe corresponent. Com que

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{F(x, \xi)}{r(x, \xi)^2} = - \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \frac{F(x, \xi)}{r(x, \xi)^2}$$

(recordeu la definició de $F(x, \xi)$), tindrem

$$I_1 = -\sigma(x) \int_{K-B(x,\rho)} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{F}{r^2} \right) d\xi = -\sigma(x) \int_{\partial K} \frac{F}{r^2} d\xi_\alpha + \sigma(x) \int_{\partial B(x,\rho)} \frac{F}{r^2} d\xi_\alpha.$$

Aquesta última integral és $-I_2$. Per tant,

$$\frac{\partial I_\rho}{\partial x^\alpha} = I_3 + I_4 - \sigma(x) \int_{\partial K} \frac{F}{r^2} d\xi_\alpha.$$

Estudiem I_3 . Pel teorema del valor mig,

$$|\sigma(\xi) - \sigma(x)| \leq L \sum |\xi^\alpha - x^\alpha| \leq L' r(x, \xi).$$

Sigui $G(x, \xi) = (\sigma(\xi) - \sigma(x))/r(x, \xi)$. $G(x, \xi)$ estarà acotada en valor absolut sobre K i $\sigma(\xi) - \sigma(x) = G(x, \xi)r(x, \xi)$. Com que

$$\frac{F}{r^2} = \frac{\xi^\alpha - x^\alpha}{r(x, \xi)^3},$$

tindrem

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{F}{r^2} \right) = 3 \frac{(x^\alpha - \xi^\alpha)^2}{r(x, \xi)^5} - \frac{1}{r^3} = 3 \frac{F(x, \xi)^2}{r(x, \xi)^3} - \frac{1}{r^3}.$$

Per tant,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{F}{r^2} \right) (\sigma(\xi) - \sigma(x)) = \frac{3F^2 G}{r^2} - \frac{G}{r^2}.$$

Com que només hi ha un r^2 al denominador, I_3 és convergent quan $\rho \rightarrow 0$. Estudiem I_4 . Sobre $\partial B(x, \rho)$ es té

$$F(x, \xi) = \frac{\xi^\alpha - x^\alpha}{r(x, \xi)} = \frac{\xi^\alpha - x^\alpha}{\rho}.$$

Fem el canvi $\xi - x = \rho\omega$. Tindrem

$$I_4 = - \int_{\omega \in S^2} \frac{\omega^\alpha}{\rho^2} (\sigma(x + \rho\omega) - \sigma(x)) d\xi_\alpha.$$

Però $d\xi_\alpha = n^\alpha \rho^2 d\omega$, i per tant I_4 tendeix a zero quan $\rho \rightarrow 0$. Calculem ara la segona integral de la fórmula (13.7). Posem $\xi = x + \rho\omega$ amb $\omega = (\xi - x)/\rho$. Recordem que sobre $\partial B(x, \rho)$ teníem $F(x, \xi) = (\xi^\alpha - x^\alpha)/\rho = \omega^\alpha$ i que $d\xi^\alpha = \omega^\alpha ds$.

$$\int_{\partial B(x, \rho)} \frac{F(x, \xi)}{r(x, \xi)^2} \sigma(\xi) d\xi = \int_{S^2} (\omega^\alpha)^2 \sigma(x + \rho\omega) d\omega.$$

Quan ρ tendeix a 0, aquesta integral tendeix a $\sigma(x) \int_{S^2} (\omega^\alpha)^2 d\omega$.

Mirem ara la fórmula (13.7). El primer membre, $\partial I_\rho / \partial x^\alpha$, és convergent quan $\rho \rightarrow 0$. L'última integral també ho és. Això fa que la primera integral del segon membre sigui convergent quan $\rho \rightarrow 0$. Prenent límits a (13.7), com que les convergències són uniformes, s'obté (13.6). ■

Corol·lari 13.5 (Identitat de Poisson) *Es compleix*

$$\Delta V = -4\pi\sigma.$$

DEMOSTRACIÓ. Es té

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\xi^\alpha - x^\alpha}{r(x, \xi)^3} \right) = 3 \frac{(\xi^\alpha - x^\alpha)^2}{r(x, \xi)^5} - \frac{1}{r(x, \xi)^3}.$$

Per tant,

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\xi^\alpha - x^\alpha}{r(x, \xi)^3} \right) = 0.$$

Sumant respecte a α a (13.6), obtindrem

$$\Delta V(x) = -\sigma \int_{\omega \in S^2} \sum (\omega^\alpha)^2 d\omega.$$

Però $\sum (\omega^\alpha)^2 = 1$ quan $\omega \in S^2$ i $\int_{\omega \in S^2} d\omega = 4\pi$. ■

Observació. Aquí hem suposat que σ estava definida a tot $\mathbf{R}^3$, que era C^∞ i que tenia suport compacte. A la pràctica aquestes hipòtesis, que hem fet per

comoditat, resulten massa restrictives. Si σ està només definida a l'interior d'un compacte K i és L^1 , com que l'espai $C_c^\infty(\overset{\circ}{K})$ de funcions C^∞ amb suport compacte contingut a $\overset{\circ}{K}$ és dens a $L^1(\overset{\circ}{K})$, per un pas al límit es pot donar sentit a les fórmules anteriors quan σ és només L^1 a l'interior d'un compacte K .

2 Magnetostàtica

2.1 Camp magnètic

Hi ha certs cossos anomenats imants que tenen la propietat d'atreure barretes de ferro dolç o llimadures de ferro. Aquesta propietat s'anomena "magnetisme", paraula que deriva de "magnetita", que és el nom d'una de les substàncies que presenta aquesta propietat. Tots els imants tenen sempre dos punts, anomenats pols, on es manifesta més intensament el magnetisme. Aquests pols no són idèntics, ja que en els imants en forma de barra, si se suspèn aquesta d'un fil pel seu centre de gravetat, un extrem sempre s'orienta aproximadament cap al nord geogràfic. Aquest extrem s'anomena pol nord de l'imant. Es comprova experimentalment que pols del mateix nom, entre dos imants, es repel·leixen, mentre que els de diferent nom, s'atreuen.

Per molt petit que sigui un imant, sempre té pol nord i pol sud. Aquesta propietat diferencia el magnetisme de l'electricitat, ja que en aquesta última existeixen càrregues (positives o negatives) aïllades.

Si posem prop d'un pol d'un imant una petita agulla imantada que pugui girar lliurement entorn del seu centre de gravetat, aquesta es mou per l'acció de dues forces sobre els seus extrems, de sentit oposat, però d'igual intensitat i direcció.

Prenguem un imant qualsevol com a patró i una petita agulla imantada, també com a patró. Mesurem la força del pol nord de l'imant patró sobre l'extrem nord de l'agulla patró situada a una unitat de distància d'aquell. El mòdul f_0 d'aquesta força es pren com a unitat del concepte de camp magnètic que anem a definir. El camp magnètic creat per un imant qualsevol en un punt determinat de l'espai és la força exercida per l'imant sobre el pol nord de l'agulla magnètica patró, situada en aquell punt, prenent com a unitat del mòdul d'aquesta força el nombre f_0 descrit abans.

Una unitat molt usada per mesurar el camp magnètic és l'*oersted*, que és el camp magnètic creat a 1 centímetre de distància del pol nord de l'imant patró, definit de la manera següent: l'imant patró és aquell que repel·leix amb una força d'una dina el pol nord d'un altre imant igual situat a 1 centímetre de distància.

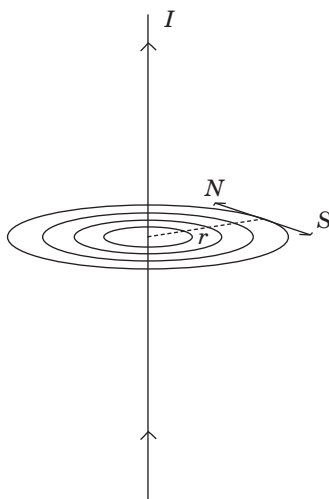


Figura 13.1

2.2 Corrents elèctrics d'intensitat constant i camps magnètics

Oersted va observar el 1819 que un corrent elèctric d'intensitat constant I circulant per un conductor rectilini produïa un camp magnètic al seu entorn, tal com es descriu a la figura 13.1, on s'indica també l'orientació que pren una agulla magnètica en aquest camp en funció del sentit de circulació del corrent elèctric. Biot i Savart van observar que el mòdul d'un camp magnètic en un punt situat a una distància r del fil conductor, en l'experiment anterior, era directament proporcional a la intensitat I del corrent i inversament proporcional a la distància r :

$$|B| = K \frac{I}{r} . \quad (13.8)$$

Més tard es va estudiar el camp magnètic produït per un circuit elèctric circular per on circulava un corrent elèctric d'intensitat I . Es va observar que, al centre d'aquest circuit, el camp magnètic B que es produïa tenia per mòdul

$$|B| = \pi K \frac{I}{R} , \quad (13.9)$$

on R és el radi.

Va ser Laplace qui, d'experiments similars, va inferir la llei general que regula aquest fenomen. Suposem una corba $\vec{x}(l)$ de $\mathbf{R}^3$ parametritzada per l'arc l , amb $l_0 \leq l \leq l_1$. Suposem que per aquesta corba circula un corrent elèctric d'intensitat I constant, en el sentit que va de $\vec{x}(l_0)$ a $\vec{x}(l_1)$. La llei de Laplace diu que el camp magnètic $\vec{B}$ produït per aquest corrent en un punt x de l'espai ve donat per

$$\vec{B}(x) = \int_{l_0}^{l_1} kI \frac{\dot{\vec{x}}(l) \wedge (\vec{x} - \vec{x}(l))}{\|\vec{x} - \vec{x}(l)\|^3} dl, \quad (13.10)$$

on $\dot{x}(l)$ indica la derivada respecte a l ($\dot{x}$ és, doncs, el vector tangent unitari). k és una constant universal. És fàcil veure que (13.8) i (13.9) s'obtenen de (13.10) com a casos particulars, amb $K = 2k$.

Fins aquí hem vist que els corrents elèctrics produeixen camps magnètics. Descrivim ara un fenomen diferent. Suposem que tenim un camp magnètic, creat per un imant, per exemple, i posem dintre d'aquest camp magnètic un circuit recorregut per un corrent elèctric d'intensitat constant I . S'observa que sobre aquest circuit actua una força. Va ser Ampère qui, basant-se en experiments, va donar la llei de la força F que actua sobre un tal conductor:

$$\vec{F} = \int_{l_0}^{l_1} kI \dot{\vec{x}}(l) \wedge \vec{B}(x(l)) dl, \quad (13.11)$$

on, com abans, se suposa que el conductor ve descrit per una corba $x(l)$ de $\mathbf{R}^3$ parametritzada per l'arc l , amb $l_0 \leq l \leq l_1$. La constant k que figura a les fórmules (13.10) i (13.11) (que és la mateixa), depèn òbviament de les unitats amb què es mesura la intensitat I , el camp magnètic B i les distàncies. Escollint convenientment aquestes unitats podríem fer, si volguéssim, $k = 1$. Ara bé, si es mesura la intensitat I en coulombs per segon (recordeu que a l'apartat 1 havíem definit el coulomb com a unitat de càrrega elèctrica), si es mesura B en oersteds (unitat definida a l'apartat anterior) i si es mesuren les distàncies en centímetres, es troba $k = 1/c$, on c és la velocitat de la llum expressada en cm/s. Aquest fet extremadament sorprenent, ja que introdueix la velocitat de la llum en una teoria que, en principi, no hi tenia res a veure, va ser descobert per Weber i Kohlrausch el 1856.

Les fórmules (13.10) i (13.11) fan referència a corrents elèctrics d'intensitat constant I que passen per fils. Tractem d'eliminar els "fils" de la teoria. Suposem ara corrents elèctrics produïts per moviments de càrregues elèctriques per tot l'espai. Com si es tractés de mecànica de fluids, un corrent pot ser descrit pel camp vectorial $\vec{J} = \sigma \vec{v}$, on $\vec{v}$ és el camp de velocitats de les partícules i σ

la densitat de càrrega. El vector $\vec{J}$ s'anomena densitat de corrent, i per a cada tros S de superfície ortogonal a $\vec{J}$, la intensitat I de corrent que travessa S és

$$I = \left\| \int_S \vec{J}(x) ds \right\| ,$$

on ds és l'element d'àrea de la superfície. Aquí suposem, de moment, que J no depèn del temps, amb la qual cosa I tampoc no en dependrà. I serà, doncs, constant com a les fórmules (13.10) i (13.11). La generalització immediata de (13.10) i (13.11) per un corrent elèctric de densitat de corrent $\vec{J}$ serà

$$\vec{B}(x) = \frac{1}{c} \int_{\mathbf{R}^3} \vec{J}(x') \wedge \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\|x - x'\|^3} dx' , \quad (13.12)$$

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int_{\mathbf{R}^3} \vec{J}(x) \wedge \vec{B}(x) dx . \quad (13.13)$$

Per abreviar la notació, posem $\vec{r}(x, x') = \vec{x}' - \vec{x}$, $r(x, x') = \|\vec{r}(x, x')\|$. Si la x' és fixa i la x variable, tindrem

$$\frac{\vec{r}(x, x')}{r^3} = \text{grad}_x \frac{1}{r(x, x')} ,$$

on el gradient és respecte a la x . Per tant, la fórmula (13.12) s'escriurà

$$B(x) = \frac{1}{c} \int_{\mathbf{R}^3} \vec{J}(x') \wedge \frac{(-\vec{r}(x, x'))}{r(x, x')^3} dx' = \frac{1}{c} \int_{\mathbf{R}^3} \text{grad}_x \left(\frac{1}{r(x, x')} \right) \wedge J(x') dx' .$$

Recordem que si $\vec{A}(x)$ és un camp vectorial de $\mathbf{R}^3$ es defineix $\text{rot } A$ com el camp vectorial de components

$$\left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} , \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} , \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) .$$

Amb aquesta definició, es té, òbviament,

$$\text{grad}_x \left(\frac{1}{r(x, x')} \right) \wedge J(x') = \text{rot}_x \left(\frac{J(x')}{r(x, x')} \right) .$$

Per tant, tindrem

$$\vec{B}(x) = \frac{1}{c} \int_{\mathbf{R}^3} \text{rot}_x \left(\frac{\vec{J}(x')}{r(x, x')} \right) dx' .$$

Un raonament anàleg al de la proposició 13.2 mostra que les derivades respecte a x es poden treure fora de la integral, amb la qual cosa

$$B(x) = \frac{1}{c} \operatorname{rot}_x \int_{\mathbf{R}^3} \frac{J(x')}{r(x, x')} dx'. \quad (13.14)$$

D'aquí es dedueix

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (13.15)$$

ja que la divergència d'un rotacional és sempre nula, com es comprova de manera immediata a partir de les definicions.

Observem aquí la diferència de comportament entre el camp magnètic B i el camp elèctric E , ja que $\operatorname{div} E = -\operatorname{div} \operatorname{grad} V = -\Delta V = 4\pi\sigma$ (corollari 13.5), mentre que $\operatorname{div} B = 0$.

És fàcil veure, a partir de les definicions, que si A és un camp vectorial qualsevol de $\mathbf{R}^3$ es té

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \Delta A,$$

on ΔA indica el vector que té per components $(\Delta A^1, \Delta A^2, \Delta A^3)$. Prenent rotacionals a (13.14) es tindrà, doncs,

$$\operatorname{rot} B = \frac{1}{c} \operatorname{grad}_x \operatorname{div} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{J(x')}{r(x, x')} dx' - \frac{1}{c} \Delta_x \int_{\mathbf{R}^3} \frac{J(x')}{r(x, x')} dx'.$$

Anomenem I_1 i I_2 , respectivament, els dos termes del segon membre de la identitat anterior.

A I_1 , es pot entrar la divergència dintre la integral. Tenint en compte que

$$\operatorname{div}_x \left(\frac{1}{r(x, x')} \right) = -\operatorname{div}_{x'} \left(\frac{1}{r(x, x')} \right),$$

es tindrà

$$I_1 = -\frac{1}{c} \operatorname{grad}_x \int_{\mathbf{R}^3} J(x') \operatorname{div}_{x'} \left(\frac{1}{r(x, x')} \right) dx'.$$

Ara bé, per la fórmula de Stokes,

$$\int_{\mathbf{R}^3} \operatorname{div}_{x'} \left(\frac{J(x')}{r(x, x')} \right) dx' = 0,$$

ja que $J(x')/r(x, x')$ s'anul·la a l'infinit. Per tant,

$$I_1 = \frac{1}{c} \operatorname{grad}_x \int_{\mathbf{R}^3} \left(\operatorname{div}_{x'} J(x') \right) \frac{1}{r(x, x')} dx'.$$

Ara bé, de les hipòtesis que la càrrega elèctrica de cada regió no varia amb el temps, per a tot domini V de $\mathbf{R}^3$ tindrem

$$0 = \int_{\partial V} (\vec{J} \cdot \vec{n}) ds = \int_V \operatorname{div} J dx$$

(és el mateix raonament que a l'equació de continuïtat del capítol 12, apartat 2).

Per tant, $\operatorname{div} J = 0$. Per tant, $I_1 = 0$. D'altra banda, fent un raonament anàleg al de la proposició 13.4 i el seu corollari, ara tindrem

$$\Delta_x \int \frac{J(x')}{r(x, x')} dx' = -4\pi J(x).$$

Per tant, resumint,

$$\operatorname{rot} B = I_1 + I_2 = \frac{4\pi}{c} J. \quad (13.16)$$

3 Electromagnetisme

3.1 Camps magnètics que varien amb el temps. Equacions de Maxwell

Suposem un circuit donat per una corba C de $\mathbf{R}^3$. Suposem que C ve donada paramètricament per $\vec{x}(l)$, $l_0 \leq l \leq l_1$. Si per C circula un corrent elèctric, es defineix la força electromotriu $\mathcal{E}$ d'aquest corrent per

$$\mathcal{E} = \int_{l_0}^{l_1} (\vec{E}(x(l)) \cdot \vec{x}(l)) dl, \quad (13.17)$$

on $\vec{E}$ és el camp elèctric i $\vec{E} \cdot \vec{x}$ indica el producte escalar dels dos vectors $\vec{E}$ i $\vec{x}$.

Suposem, de moment, que per C no passa cap corrent, i que situem C dins d'un camp magnètic que varia amb el temps. L'experiència demostra que la variació del camp magnètic produeix un corrent elèctric al circuit C . Faraday va descobrir la llei que relaciona aquest corrent amb la variació de camp magnètic. Per donar aquesta llei, definim, primer, el concepte de flux magnètic a través d'una superfície. Sigui S un tros de superfície orientada situada dins d'un camp magnètic $\vec{B}$. El flux magnètic ϕ a través de S es defineix com

$$\phi = \int_S (\vec{B} \cdot \vec{n}) ds,$$

on $\vec{n}$ és el vector normal a S , unitari (l'orientació de S dóna un sentit al vector $\vec{n}$, dels dos possibles), i ds és l'element d'àrea de S .

Ara podem enunciar la llei de Faraday de la manera següent. Sigui S una superfície qualsevol, la vora de la qual sigui C . La parametrització presa de C dóna un sentit de recorregut de C , que dóna una orientació a S . La força electromotriu $\mathcal{E}$ del corrent produït a C està relacionada amb el flux magnètic ϕ a través de S per

$$\mathcal{E} = -K \frac{d\phi}{dt}. \quad (13.18)$$

Observem, en primer lloc, que a la formulació de la llei de Faraday no especifiquem quina superfície S prenem que tingui C per vora. Per tal que la formulació de la llei fos correcta hauríem de veure, doncs, que (13.18) no depèn de la superfície S escollida amb la condició que tingui C per vora. En efecte, si S_1 i S_2 són dues superfícies tals, com que $\text{div } B = 0$ (per (13.15)), la fórmula de Stokes ens assegura que

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n} ds = \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n} ds.$$

La constant K de (13.18) depèn, naturalment, del sistema d'unitats que s'utilitzi per mesurar B , E , el temps i les distàncies. Si es mesura B en oersteds, E en coulombs/cm², les distàncies en centímetres i el temps en segons, la constant K val $1/c$, on c és la velocitat de la llum expressada en cm/s. O sigui,

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\phi}{dt}. \quad (13.19)$$

Aplicant la fórmula de Stokes a (13.17) s'obté

$$\mathcal{E} = \int_S ((\text{rot } E) \cdot n) ds.$$

Per tant, (13.18) s'escriu

$$\int_S ((\text{rot } E) \cdot n) ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S (B \cdot n) ds.$$

Com que això ha de ser veritat per a qualsevol superfície S , es té la següent llei diferencial:

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (13.20)$$

que és equivalent a la llei (13.19) de Faraday.

Resumim a continuació les lleis bàsiques de l'electricitat i el magnetisme que hem trobat fins ara:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} E = 4\pi\sigma & \text{(Poisson) (corol·lari 13.5)} \\ \operatorname{rot} B = \frac{4\pi}{c}J & \text{(Laplace) (fórmula (13.16))} \\ \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} & \text{(Faraday) (fórmula (13.20))} \\ \operatorname{div} B = 0 & \text{(fórmula (13.15)) (conseqüència de la llei de Laplace).} \end{array} \right. \quad (13.21)$$

Observem, però, que totes aquestes lleis, llevat de la de Faraday, les havíem deduït amb condicions estàtiques (E , B , σ i J no depenien del temps). En canvi, per a la llei de Faraday era imprescindible que B canviés amb el temps. No podem esperar que les fórmules (13.21) es compleixin quan E , B , σ i J depenguin del temps. Si la càrrega elèctrica d'una determinada regió varia amb el temps, E variarà amb el temps i, raonant com al capítol 12, s'obtindrà

$$\frac{d}{dt} \int_V \sigma dv = - \int_{\partial V} \vec{J} \cdot \vec{n} ds = (\text{Stokes}) = - \int_V \operatorname{div} J dv,$$

d'on s'obté la llei de continuïtat (similar a la del capítol 12, apartat 2):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} J = 0. \quad (13.22)$$

Observem que la segona fórmula de (13.21), que hem dit que no havia pas de ser certa en condicions generals, de fet és incompatible amb (13.22). En efecte, prenent divergències a la segona fórmula de (13.21), i tenint en compte que la divergència d'un rotacional és nul·la, s'obté

$$\operatorname{div} J = 0.$$

Maxwell volia endevinar quina forma tindrien les equacions que relacionen E i B quan els dos varien amb el temps. Per a això va tractar de fer els menors canvis possibles a (13.21) perquè aquelles equacions fossin compatibles amb (13.22). L'equació de Poisson, segons la deducció que n'hem fet a l'apartat 2, també haurà de funcionar per a camps E dependents del temps. L'equació $\operatorname{div} B = 0$ també, segons la deducció que n'hem fet a l'apartat 4. De fet, podem reproduir al peu de la lletra aquells arguments per a cada instant de

temps t_0 fix. De (13.22) i de l'equació de Poisson s'obté

$$\operatorname{div} J = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\partial E}{\partial t}.$$

És a dir,

$$\operatorname{div} \left(J + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0.$$

Això indica que la segona fórmula de (13.21) seria compatible amb la llei de continuïtat (13.22) si se substituïm en aquella equació J per $J + (1/4\pi)(\partial E/\partial t)$. Això va fer pensar a Maxwell que la segona fórmula de (13.21) s'hauria de substituir (quan E i B depenen del temps) per

$$\operatorname{rot} B = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Maxwell va proposar, doncs, les següents equacions com a candidates idònies per a relacionar E , B , J i σ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} E & = 4\pi\sigma \\ \operatorname{rot} B & = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \\ \operatorname{rot} E & = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \\ \operatorname{div} B & = 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} J & = 0. \end{array} \right. \quad (13.23)$$

Com que aquestes equacions concorden amb els resultats experimentals, nosaltres les acceptarem com a lleis bàsiques de la física. Les lleis bàsiques de la física (com la de gravitació de Newton, per exemple) no les hem demostrat, sinó que les hem acceptat com a punt de partida i n'hem deduït resultats concrets (les trajectòries dels planetes en el sistema solar, per exemple) que estan d'acord amb els fets experimentals.

Suposem ara una partícula amb una càrrega elèctrica q (un electró, per exemple) que es mou sota l'acció d'un camp magnètic B i d'un camp elèctric E , tots dos dependents del temps. Voldríem saber la força que actua sobre la partícula en cada instant de temps. La força serà la suma de la deguda al camp elèctric, que és $q\vec{E}$, més la deguda al camp magnètic, que ve donada per la llei d'Ampère (13.13). Ara bé, la formulació que hem fet d'aquesta llei és per a

cossos continus i no s'adapta bé a la nostra situació actual (un cos puntual). Per tal de poder aplicar (13.13) al peu de la lletra, suposem, de moment, que el cos que tenim és cúbic i que la longitud de cada aresta és a . Suposem que a l'instant de temps que estem considerant es mou amb velocitat $\vec{v}$. Suposem, a més, que el camp magnètic B , al qual està sotmès, té el mateix valor en tots els punts del cos en aquell instant de temps. Si el cos és petit, això passarà en primera aproximació. Apliquem (13.13). Si σ és la densitat de càrrega (constant) i $\vec{v}$ la velocitat del cos, J serà σv . Per tant, (13.13) ens donarà

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int_{\text{cub}} (\sigma \vec{v} \wedge \vec{B}) dx = \frac{1}{c} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \sigma a^3.$$

Com que la càrrega q del cub és σa^3 , tenim

$$\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

La hipòtesi que hem fet que el cos fos un cub petit és purament tècnica. Si la partícula és puntual, la força total a què estarà sotmesa per l'acció del camp elèctric i del camp magnètic serà

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}. \quad (13.24)$$

Aquesta llei, donada per Lorentz, s'ha d'afegir a les fórmules (13.23) de Maxwell. Les fórmules (13.23) descriuen les relacions entre E , B , σ i J . La fórmula (13.24) dóna el moviment de qualsevol partícula carregada, situada dins d'aquest camp electromagnètic.

Part III

Relativitat especial i general

Els capítols 14 i 15 —que constitueixen una bona part de la Relativitat Especial— no requereixen gairebé cap coneixement previ. En canvi, els capítols de relativitat general —18, 19 i 20— utilitzen la pràctica totalitat de conceptes de geometria diferencial de la part I, i la majoria de nocions de física clàssica de la part II.

Capítol 14

Cinemàtica de la relativitat especial

1 Paper dels sistemes de referència en la física clàssica

Recordem que Newton admetia l'existència d'un espai absolut, immòbil, que nosaltres hem identificat amb $\mathbf{R}^3$, dintre del qual hi havia tots els cossos físics. Suposem ara que un observador $O'(t)$ es mou respecte a l'origen O de $\mathbf{R}^3$ amb moviment rectilini uniforme. Sigui $P(t)$ una partícula que es mou respecte a l'origen de $\mathbf{R}^3$. La seva acceleració relativa respecte a O' és la mateixa que la seva acceleració respecte a O ja que

$$\frac{d^2(P(t) - O'(t))}{dt^2} = \frac{d^2P(t)}{dt^2} - \underbrace{\frac{d^2O'(t)}{dt^2}}_{=0}.$$

Un observador situat a l'origen de $\mathbf{R}^3$, en veure que la partícula $P(t)$ es mou, atribuirà el seu moviment a l'acció d'una força $md^2P(t)/dt^2$. L'observador O' atribuirà el seu moviment a l'acció de la mateixa força, exactament. Per tant, els conceptes d'acceleració i força són els mateixos per a un observador immòbil situat a l'origen i per a un observador que es mou respecte al primer amb moviment rectilini i uniforme. El mateix succeeix amb la llei de gravitació universal:

$$\vec{F}_{ij} = \frac{Km_i m_j (\vec{p}_i - \vec{p}_j)}{\|p_i - p_j\|^3},$$

on p_i i p_j són els vectors posició de les partícules P_i i P_j de masses respectives m_i i m_j , i F_{ij} és la força d'atracció de P_i sobre P_j . En efecte, el primer membre

de l'expressió anterior queda inalterat si el referim a l'origen mòbil O' (perquè es tracta d'una força) i el segon membre també queda inalterat (ja que p_i i p_j s'haurien de substituir per $p_i - O'$ i $p_j - O'$, però la diferència $p_i - p_j$ resta inalterada per aquesta substitució). Succeeix el mateix amb les lleis del xoc de partícules i els principis de la mecànica de fluids.

Així doncs, tota la mecànica clàssica s'enunciaria d'idèntica manera si en comptes de referir-la a observadors immòbils la referíssim a observadors que es mouen respecte als primers amb moviment rectilini i uniforme. Dit d'una altra manera, no hi ha cap procediment mecànic per comprovar si un observador està immòbil a l'espai absolut de Newton o si es mou amb moviment rectilini i uniforme respecte a la referència immòbil de $\mathbf{R}^3$ considerada per Newton. El que sí que podem afirmar és que hi ha una classe privilegiada d'observadors, que es mouen els uns respecte als altres amb moviment rectilini i uniforme, per als quals les lleis de la mecànica s'expressen tal com hem fet. Un observador qualsevol d'aquesta classe privilegiada l'anomenarem observador inercial.

Però, ¿com es pot reconèixer físicament un observador inercial? Evidentment, és aquell sobre el qual no actua cap força. Però, ¿on pot haver-hi un tal observador?

En el problema dels dos cossos (capítol 11) vam veure que el centre de masses de les partícules P_1 i P_2 estava immòbil (respecte a la referència immòbil de Newton) o es movia respecte a l'origen de $\mathbf{R}^3$ amb moviment rectilini i uniforme. El mateix es pot veure per a n cossos. Sigui, doncs, O el centre de masses del sistema solar. Un observador situat a O seria inercial (si limitéssim les nostres experiències físiques al sistema solar). També seria inercial qualsevol observador que es moguéssim respecte a O amb moviment rectilini i uniforme.

Les consideracions que acabem de fer no s'apliquen, però, a l'electromagnetisme. Així com les lleis de la mecànica són invariants respecte a qualsevol observador inercial, les lleis de l'electromagnetisme (equacions de Maxwell-Lorentz) canvien si en comptes de referir-les a un observador "immòbil" es refereixen a qualsevol observador mòbil, encara que aquest es mogui amb moviment rectilini i uniforme. Vegem-ho. Considerem un camp elèctric $\vec{E}$ i un camp magnètic $\vec{B}$ creats per una distribució de càrregues en moviment, i referits a observadors "immòbils". Sigui $\vec{J}$ el camp vectorial densitat de corrent corresponent. Prenent rotacionals a la segona equació de (13.23) (capítol 13), tindrem

$$\text{rot rot } B - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } E = \frac{4\pi}{c} \text{rot } J .$$

Derivem la tercera equació de (13.23) respecte al temps. Tindrem

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} .$$

Substituïm aquest valor a l'equació que hem trobat abans, tenint en compte que $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$, on Δ és l'operador de Laplace. Tindrem

$$-\Delta B + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \text{grad div } B = \frac{4\pi}{c} \text{rot } J .$$

Ara bé, en virtut de la quarta equació de (13.23), $\text{div } B = 0$. Veiem, doncs, que a les regions de $\mathbf{R}^3$ on $J = 0$ (les regions on no hi ha les càrregues elèctriques en moviment que creen el camp), el camp B compleix l'equació d'ona

$$\Delta B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0 .$$

(Podríem haver fet el mateix per al camp elèctric E .) Per veure que les equacions de l'electromagnetisme clàssic no adopten la mateixa forma si les referim a un sistema d'observadors que viatgen amb moviment uniforme respecte als observadors “immòbils” de la física de Newton, considerem un sistema S' de tres eixos perpendiculars que viatja respecte als eixos “immòbils” amb velocitat constant $\vec{u} = (u, 0, 0)$. Anomenem E' i B' , respectivament, els camps elèctric i magnètic que mesuraran els observadors que viatgen amb els eixos de S' . Suposem que un d'aquests observadors deixa en repòs —en el seu sistema— una partícula P de càrrega q en un determinat punt. Si les fórmules de l'electromagnetisme adoptessin la mateixa forma en tots els sistemes inercials, segons la llei de Lorentz (13.24), sobre la partícula P actuaria una força $\vec{F}' = q\vec{E}'$. Ara bé, aquella partícula viatjarà amb velocitat $\vec{u}$ per als observadors “immòbils”, i sobre ella actuarà una força $\vec{F} = q\vec{E} + (q/c)\vec{u} \wedge \vec{B}$. Com que ja hem dit abans que el concepte de força no varia quan es refereix a observadors “immòbils” o a observadors que es mouen respecte als primers amb moviment uniforme, $F = F'$ i, per tant, $E' = E + (1/q)u \wedge B$. Suposem ara que els observadors de S' repeteixen el mateix experiment deixant la partícula P en el mateix punt d'abans, però ara comunicant-li una velocitat inicial arbitrària $\vec{v}'$ (abans la deixaven en repòs). Segons (13.24), la força que actuarà ara sobre la partícula serà $F' = qE' + (q/c)v' \wedge B'$. Els observadors “immòbils” mesuraran una força $F = qE + (q/c)(v' + u) \wedge B$. Igualant F amb F' i tenint present l'expressió que hem trobat de E' , tindrem finalment $v' \wedge B' = v' \wedge B$. Com que això s'ha de complir per a qualsevol velocitat inicial $\vec{v}'$ que els observadors de S' comuniquin a la partícula, d'aquí es dedueix $B' = B$. Així, doncs, si les lleis de l'electromagnetisme fossin invariants per canvis de Galileu (canvis de la referència “immòbil” a una altra amb moviment uniforme), tindríem

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{B} \\ \vec{E}' &= \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{B} . \end{aligned}$$

Les equacions del canvi són

$$\begin{cases} x^1 &= x'^1 + ut' \\ x^2 &= x'^2 \\ x^3 &= x'^3 \\ t &= t' . \end{cases}$$

D'aquí s'obté $\partial/\partial t' = u\partial/\partial x^1 + \partial/\partial t$, $\partial/\partial x^i = \partial/\partial x'^i$. En les regions de l'espai on no hi ha les càrregues elèctriques en moviment que creen el camp electromagnètic, sabem que es compleix l'equació d'ona

$$\frac{\partial^2 B}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial (x^3)^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0 .$$

Si les fórmules de l'electromagnetisme fossin invariants, com que $B = B'$, s'hauria de complir també

$$\frac{\partial^2 B}{\partial (x'^1)^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial (x'^2)^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial (x'^3)^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t'^2} = 0 .$$

Ara bé, com que $\partial/\partial x^i = \partial/\partial x'^i$ i com que $\partial/\partial t' = u\partial/\partial x^1 + \partial/\partial t$, aquesta última equació s'escriu

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 B}{\partial (x^i)^2} - \frac{u^2}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial (x^1)^2} - \frac{2u}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^1 \partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0 .$$

Com que hem vist abans que B compleix l'equació d'ona, d'aquí deduïm que per a qualsevol nombre real u i qualsevol camp magnètic B creat per càrregues elèctriques en moviment, fora de la regió on es troben aquestes càrregues elèctriques s'hauria de complir

$$u \frac{\partial^2 B}{\partial (x^1)^2} = -2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^1 \partial t} .$$

Això implica que $\partial^2 B/\partial (x^1)^2 = 0$ i que $\partial^2 B/\partial x^1 \partial t = 0$. Com que l'eix de les x^1 pot ser qualsevol, es té $\partial^2 B/\partial (x^i)^2 = 0$ per a tot i . De l'equació d'ona es desprèn llavors que $\partial^2 B/\partial t^2 = 0$. Tot això només es pot complir quan B és lineal, de la forma

$$\vec{B}(x^1, x^2, x^3, t) = x^1 \vec{a} + x^2 \vec{b} + x^3 \vec{c} + t \vec{d} + \vec{e} ,$$

on $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ i $\vec{e}$ són vectors constants. Si imposem ara que $\vec{B}$ s'anul·li a l'infinit (la intuïció ens diu que qualsevol camp creat per càrregues en moviment en una regió finita de l'espai s'ha d'anul·lar a l'infinit), resulta que $\vec{B}$ ha de ser idènticament nul. Per tant, si les equacions de Maxwell fossin invariants per canvis de Galileu, qualsevol camp magnètic creat per càrregues elèctriques en moviment hauria de ser idènticament nul fora de la regió de l'espai on no hi ha les càrregues elèctriques que el creen. Això, òbviament, és completament absurd.

Tot això fa que l'electromagnetisme clàssic, al contrari de la mecànica, hagi de suposar l'existència d'una referència immòbil. Per aquesta raó va sorgir el concepte d'"èter", espècie d'ens immòbil per on se suposava que es propagaven les ones electromagnètiques. Si aquest èter immòbil existís, seria lògic pensar que es pot idear un experiment per posar de manifest qualsevol moviment respecte a ell. Al llarg del segle passat, una sèrie d'experiments van ser ideats per calcular la velocitat de la Terra respecte a aquest èter immòbil, però tots van fracassar.

Un experiment molt enginyós i precís ideat per Michelson i Morley per mesurar els canvis que la velocitat de l'observador imposava al valor de la velocitat de la llum en el buit, donava un resultat sorprenent: la velocitat de la llum no depenia de la velocitat de l'observador.

Simultàniament, Voigt, Poincaré i Lorentz, davant del fet que les equacions de l'electromagnetisme no són invariants per canvis de referències inercials, van cercar un grup de transformacions que les deixés invariants. En aquestes transformacions s'havia de canviar l'escala de temps. No obstant això, ningú no pensava llavors que el temps "universal" de Newton canviés realment en passar d'una referència a una altra. Més aviat s'interpretava aquest canvi d'escala de temps com una eina matemàtica per a explicar determinats fets. Es parlava de temps "local" en les transformacions de Lorentz, en contraposició amb el temps real i universal admès per Newton.

Així les coses, a començament de segle Einstein va idear la teoria de la relativitat especial (que no englobava la llei de gravitació) i, més tard, la de la relativitat general, que explicava la teoria de gravitació universal.

2 Els postulats de la relativitat especial

Suposarem, com Newton, que els cossos físics són a l'espai ordinari de tres dimensions, que podem suposar de moment (de manera filosòfica) immòbil. No obstant això, en el món físic no hi ha cap referència privilegiada d'aquest espai, materialitzada físicament. Això vol dir que, quan nosaltres anem pel carrer,

no ens trobarem mai tres eixos i un origen amb un rètol que digui: “Referència canònica de $\mathbf{R}^3$, creada per Déu des del principi del temps”. Com que aquesta referència no la trobarem mai, no podrem saber si nosaltres estem “immòbils” o no, ja que per a això caldria comparar el nostre estat de repòs o moviment amb el d’un punt que sabéssim segur que està immòbil.

En virtut d’això que acabem de dir, tothom té, de moment, el perfecte dret de considerar que ell mateix està sempre immòbil i que és tota la resta el que es mou. Tu mateix et pots considerar immòbil, tant quan estàs assegut com quan camines. En aquest últim cas tens el dret de pensar que el terra, els arbres, les cases que veus passar mentre passeges, tot es mou. Però tu restes quiet, immòbil.

Una vegada t’hagis imaginat això, elegeix uns eixos rectangulars de coordenades solidaris amb tu. Diràs que tot punt que es bellugui en relació amb aquests eixos es mou, i que tot punt que en el transcurs del temps mantingui inalterades les seves coordenades respecte a aquests eixos, està immòbil. No cal dir que hem suposat que haves escollit una unitat de distància amb la qual un teu amic o amiga mesura les coordenades de qualsevol punt. Tu no pots fer-ho perquè ets l’origen: tot es refereix a tu.

Per estudiar el moviment dels cossos que es mouen, necessaries, però, un rellotge que marxi molt uniformement. Més encara: convindria que tots els observadors immòbils respecte a tu poguessin disposar de rellotges sincronitzats amb el teu. Llavors tindria sentit dir que un cos es troba en el punt de coordenades (x, y, z) a l’instant t . Això voldria dir que un observador situat en el punt de coordenades (x, y, z) , immòbil respecte a tu, hi ha vist aquest cos a l’instant t del seu rellotge.

Definim amb precisió què vol dir que un rellotge situat en un punt A , immòbil respecte a tu, estigui sincronitzat amb un altre rellotge situat en un altre punt B , també immòbil respecte a tu. Suposem que un observador situat a A emet un raig de llum en la direcció de B a l’instant t_0 del rellotge de A . Suposem que aquest raig arriba a B a l’instant t'_0 del rellotge de B i que, reflectit per un mirall, torna cap a A i hi arriba a l’instant t_1 del rellotge de A . Es diu que el rellotge de A està sincronitzat amb el de B si sempre que es repeteixi l’experiment, es troba la relació $t'_0 - t_0 = t_1 - t'_0$.

Definició 14.1 (Sistema de referència) *Anomenarem sistema de referència el conjunt de tres eixos perpendiculars de l’espai amb un origen comú, sobre cada un dels quals hem elegit una orientació. Suposarem també que hem elegit una unitat de distància i que en cada punt A de l’espai immòbil respecte a aquests eixos hi ha un rellotge R_A , de manera que els rellotges R_A i R_B corresponents a dos punts diferents A i B immòbils respecte a aquests eixos estan sincronitzats.*

La condició que en cada punt immòbil respecte a un sistema de referència hi hagi un rellotge, i que tots aquests rellotges es puguin sincronitzar, és molt forta. Algú podria pensar que amb aquesta condició tan restrictiva podria no haver-hi cap *sistema de referència*. Precisament, el principi de relativitat que enunciaré més endavant afirma l'existència de *sistemes de referència*.

Fixat un sistema de referència, podem associar a cada esdeveniment les tres coordenades (x^1, x^2, x^3) (respecte als eixos del sistema) del punt on s'ha produït i el temps t que marcava el rellotge del sistema situat en aquell punt a l'instant en què l'esdeveniment ha tingut lloc. Si S i S' són dos sistemes de referència diferents, podrà succeir que S' es mogui respecte a S . Això voldrà dir que qualsevol partícula material puntual A immòbil respecte als eixos de S' es troba en cada instant t de S en el punt de coordenades $(A^1(t), A^2(t), A^3(t))$ respecte als eixos de S i descriu, doncs, la corba $\vec{A}(t) = (A^1(t), A^2(t), A^3(t))$ respecte als observadors de S .

Definició 14.2 (Moviment uniforme entre sistemes de referència) *Siguin S i S' dos sistemes de referència. Direm que S' es mou amb moviment rectilini i uniforme respecte a S si existeix un $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ tal que tota partícula material puntual A immòbil respecte a un observador de S' es troba en cada instant t del temps de S en el punt de coordenades $(A^1(t), A^2(t), A^3(t))$ respecte als eixos de S , de manera que $dA^i(t)/dt = v^i \ \forall t, i = 1, 2, 3$.*

Definició 14.3 (Sistemes equivalents) *Direm que dos sistemes de referència S i S' són equivalents si estan immòbils un respecte a l'altre i utilitzen els dos la mateixa unitat de distància i la mateixa escala de temps, o bé compleixen les propietats següents:*

- a) *Cada un d'ells es mou respecte a l'altre amb moviment rectilini i uniforme de velocitat no nul·la.*
- b) *Dos esdeveniments ocorreguts en un punt immòbil respecte a S són vistos des de S' en el mateix ordre temporal en què els ha vist un observador de S . El mateix succeeix intercanviant els papers de S i S' .*
- c) *Es fa l'experiment següent: s'observen des de S' dos esdeveniments ocorreguts en un punt A immòbil respecte a S i separats per un interval de temps (de S) de longitud 1. Com que S es mou respecte a S' , aquests dos esdeveniments són vistos des de S' en dos punts diferents de l'espai. Es mesura a S' la distància entre aquests dos punts. La condició que estem enunciant demana que el resultat d'aquest experiment doni el mateix valor si s'intercanvien els papers de S i S' .*

Amb aquestes definicions podem passar a enunciar un dels dos postulats fonamentals de la relativitat especial, l'anomenat principi de relativitat. De moment donarem un enunciat provisional d'aquest principi. Més endavant, a fi que la teoria sigui coherent, l'hauréu de modificar lleugerament.

Principi de relativitat. Existeix una classe privilegiada de sistemes de referència, cada un dels quals s'anomena sistema inercial, que compleixen les quatre propietats següents:

- A) Si S és inercial, ho és també tot sistema S' immòbil respecte a S que s'obtingui de S per un desplaçament d'eixos i per un canvi d'origen de temps (recordem que s'anomena desplaçament tota transformació bijectiva de $\mathbf{R}^3$ que transforma rectes en rectes i conserva les distàncies).
- B) Si S és inercial, i P un punt mòbil que viatja respecte a S amb moviment rectilini i uniforme de velocitat donada $\vec{v}$, existeix un sistema inercial que té P per origen.
- C) Dos sistemes inercials S i S' són sempre equivalents.
- D) Els observadors que viatgen en qualsevol sistema inercial poden enunciar les lleis físiques d'igual manera, independentment del sistema inercial on es troben.

Aquest principi de relativitat era complert escrupolosament per la mecànica clàssica, però no per l'electromagnetisme clàssic. La novetat consisteix, aquí, a exigir-lo per a tota la física.

A la literatura, el principi de relativitat s'enuncia de manera molt més senzilla dient que existeix una triple infinitat de sistemes de referència (mòdul desplaçaments de $\mathbf{R}^3$) que es mouen els uns respecte als altres amb moviment rectilini uniforme i per als quals val D). Totes les propietats que aquí hem enunciat amb detall, com per exemple c) de la definició de sistemes equivalents, es fan derivar de D). Tot depèn d'allò que s'entengui per "lei física" a l'enunciat de D). Nosaltres farem servir D) únicament quan enunciem lleis com les equacions de Maxwell de l'electromagnetisme, lleis de xoc de partícules, etc.

Principi d'invariància de la velocitat de la llum.

- a) Si un observador immòbil respecte a un sistema inercial S contempla la propagació en el buit d'un raig instantani de llum, emès per qualsevol focus lluminós, observarà que aquest es propaga amb moviment rectilini uniforme.

- b) El mòdul del vector velocitat d'un tal raig de llum és constant, independentment del sistema inercial S . (Sí que depèn, però, del medi. La llum es propaga amb velocitats diferents en medis diferents. Nosaltres suposarem que som en el buit.) Anomenarem c aquesta constant.

Observem que el principi d'invariància de la velocitat de la llum s'enuncia per a un raig de llum emès per "qualsevol" focus lluminós, independentment del seu moviment.

Així com el principi de relativitat és complert escrupolosament per la mecànica clàssica, aquest principi d'invariància de la velocitat de la llum és inconcebible des del punt de vista de Newton. Ens veiem obligats a acceptar-lo com a fet experimental comprovat per l'experiment de Michelson-Morley.

3 Les transformacions de Lorentz

Siguin S i S' dos sistemes de referència inercials. Un esdeveniment qualsevol, vist per un observador immòbil respecte a S , quedarà determinat per les coordenades (x^1, x^2, x^3) del punt de l'espai on s'ha produït (respecte als tres eixos de S) i pel temps t (dels rellotges sincronitzats de S) en què ha tingut lloc. A cada esdeveniment contemplat des de S li correspon, doncs, un punt (x^1, x^2, x^3, t) de $\mathbf{R}^4$. Al mateix esdeveniment contemplat per un observador de S' li correspondrà un punt (x'^1, x'^2, x'^3, t') de $\mathbf{R}^4$. Per tant, donats dos sistemes inercials S i S' , tenim una aplicació $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ que assigna a les coordenades (x^1, x^2, x^3, t) d'un esdeveniment contemplat des de S les coordenades (x'^1, x'^2, x'^3, t') del mateix esdeveniment contemplat des de S' . Una tal aplicació f s'anomena transformació de Lorentz. Aquí ens proposem veure la forma analítica d'aquestes transformacions.

Observem, en primer lloc, que tal com hem definit l'aplicació f hem acceptat implícitament que f és bijectiva. En efecte, hem acceptat que podem reconèixer un mateix esdeveniment des de S i des de S' . Com que S i S' són sistemes inercials qualssevol, l'aplicació que assigna a les coordenades (x'^1, x'^2, x'^3, t') d'un esdeveniment contemplat des de S' , les coordenades (x^1, x^2, x^3, t) del mateix esdeveniment contemplat des de S , serà, òbviament, la inversa de f .

Lema 14.4 *f transforma rectes de $\mathbf{R}^4$ no contingudes en un hiperplà de la forma $t = \text{constant}$, en rectes de $\mathbf{R}^4$ no contingudes en un hiperplà $t' = \text{constant}$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui r una recta de $\mathbf{R}^4$ no continguda en un hiperplà de la forma $t = \text{constant}$. Llavors es pot parametritzar de la manera següent:

$$\begin{cases} x^i = x^i(t) = v^i t + b^i, & i = 1, 2, 3 \\ t = t. \end{cases}$$

Aquesta recta de $\mathbf{R}^4$ representarà el moviment d'un punt $P(t)$ de coordenades $(x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ a l'espai ordinari, que viatja amb velocitat $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$. Tot això referit als tres eixos de S i al temps t de S . Per la condició B) del principi de relativitat, existirà un sistema de referència inercial S'' que tindrà per origen aquest punt. Per la condició C), S'' es mou respecte a S' amb moviment rectilini i uniforme. Un observador qualsevol de S' representarà, doncs, el moviment de la partícula P , que és l'origen de S'' , per una recta de $\mathbf{R}^4$, que no és altra cosa que $f(r)$. ■

Lema 14.5 *Si V és un pla de $\mathbf{R}^4$ no contingut en cap hiperplà de la forma $t = \text{constant}$, $f(V)$ és, també, un pla de $\mathbf{R}^4$ no contingut en cap hiperplà de la forma $t' = \text{constant}$.*

DEMOSTRACIÓ. V serà de la forma $a + H$, on H és un subespai de $\mathbf{R}^4$ en el qual podem trobar una base v_1, v_2 de vectors no horitzontals (és a dir, amb quarta component no nul·la). Les rectes $a + \langle v_1 \rangle$, $a + \langle v_2 \rangle$ es transformen per f en dues rectes r_1 i r_2 , en virtut del lema 14.4, la intersecció de les quals serà $f(a)$. Sigui W el pla que conté r_1 i r_2 (el qual no serà horitzontal). Volem veure que $f(V) = W$. Sigui x un punt qualsevol de V que no estigui sobre les rectes $a + \langle v_1 \rangle$ i $a + \langle v_2 \rangle$. Volem veure que $f(x) \in W$. Sigui β una recta de V que passi per x i tingui com a vector director un $\vec{u}$ no horitzontal, $\vec{u} \notin \langle v_1 \rangle$, $\vec{u} \notin \langle v_2 \rangle$. β tallarà les rectes $a + \langle v_1 \rangle$ i $a + \langle v_2 \rangle$. $f(x)$ ha d'estar sobre $f(\beta)$, que en virtut del lema anterior serà una recta no horitzontal que tallarà r_1 i r_2 . Per tant, $f(\beta) \subset W$. Això prova $f(V) \subset W$. Un argument similar aplicat a f^{-1} prova que $f(V) = W$. ■

Un raonament anàleg prova el lema següent:

Lema 14.6 *f transforma hiperplans que no siguin de la forma $t = \text{constant}$ en hiperplans que no són de la forma $t' = \text{constant}$.*

Teorema 14.7 *f és una afinitat, és a dir, f és de la forma $f(\vec{x}) = a(\vec{x}) + \vec{b}$, amb $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3, t)$, $\vec{b} = (b^1, b^2, b^3, b^4)$ i a una transformació lineal de $\mathbf{R}^4$.*

DEMOSTRACIÓ. Com que una recta qualsevol, encara que sigui horitzontal, es pot pensar com a intersecció de tres hiperplans no horitzontals, f haurà de transformar rectes en rectes. Vegem que f conserva, a més, el paral·lelisme. Si r i r' són dues rectes paral·leles, sigui H el pla que determinen. Les rectes $f(r)$ i $f(r')$ estaran contingudes a $f(H)$, que és un pla. Si $f(r)$ i $f(r')$ no fossin paral·leles, pel fet de ser coplanàries, tindrien un punt A en comú. Com que f és bijectiva, això exigiria que $f^{-1}(A)$ fos a la vegada de r i r' , la qual cosa contradiria el fet que r i r' siguin paral·leles. Resumint, f transforma rectes

en rectes i conserva el paral·lelisme. Un conegut teorema de geometria ens assegura que, amb aquestes condicions, f és una afinitat. ■

Corol·lari 14.8 *Sigui f una transformació de Lorentz, i H un hiperplà de $\mathbf{R}^4$ de la forma $t = \text{constant}$. Llavors $f(H)$ és un hiperplà de la forma $t = \text{constant}$.*

DEMOSTRACIÓ. Si $f(H)$ no fos horitzontal, $H = f^{-1}f(H)$ no seria horitzontal (lema 14.6). ■

Observació important. Més endavant, quan tinguem la forma explícita de les transformacions de Lorentz, observarem que aquest corol·lari no es compleix. Això ens donarà una contradicció dins de la teoria que analitzarem amb detall. La contradicció vindrà del fet d'haver permès velocitats $\vec{v}$ qualssevol a la condició B) del principi de relativitat. Precisament, per tal d'evitar aquesta contradicció, imposarem la condició $|\vec{v}| < c$. Però tot això ja ho veurem més endavant. Continuem, doncs, de moment, amb les mateixes hipòtesis que fins ara.

Ara ens proposem trobar la forma explícita d'una transformació de Lorentz f . Suposem que aquesta ens ve donada pel canvi d'un sistema inercial S a un altre S' on els eixos de S i S' i els orígens de temps han estat presos de la manera següent. L'eix de les x^1 de S té la direcció del vector velocitat del moviment uniforme de S' vist des de S . Això vol dir que qualsevol punt de S' que sigui sobre l'eix de les x^1 en un instant de temps, hi serà sempre. Siguin, doncs, P' i Q' dos punts immòbils respecte a S' que en un instant de temps de S siguin sobre l'eix de les x^1 . Prenguem l'eix de les x'^1 de S' com l'eix determinat per P' i Q' . Amb aquesta elecció, l'eix de les x^1 i el de les x'^1 coincidiran sempre. Prenguem, a més, els orígens de temps i els orígens dels eixos de S i S' de tal manera que quan $t = 0$ i $t' = 0$, l'origen $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^3 = 0$ de S coincideixi amb l'origen $x'^1 = 0$, $x'^2 = 0$, $x'^3 = 0$ de S' .

Amb aquestes eleccions d'eixos i orígens ens proposem escriure explícitament f . Pel fet de ser una afinitat, serà de la forma

$$\begin{cases} x'^i = \sum_{j=1}^3 a_j^i x^j + a_4^i t + k^i; & i = 1, 2, 3 \\ t' = \sum_{j=1}^3 a_j^4 x^j + a_4^4 t + k^4. \end{cases}$$

La condició que els orígens coincideixin en els orígens de temps, implica $k^1 = k^2 = k^3 = k^4 = 0$. La condició que l'eix de les x^1 (que té per equacions $x^2 = 0$, $x^3 = 0$) coincideixi amb l'eix de les x'^1 , fa que quan $x^2 = 0$, $x^3 = 0$, hagi de ser $x'^2 = x'^3 = 0$. Per tant, $a_1^2 = a_4^2 = 0$ i $a_1^3 = a_4^3 = 0$.

En virtut de la condició b) de la definició de sistemes equivalents, a_4^4 haurà de ser positiu. Posem $v = -a_4^1/a_4^4$. Després donarem una interpretació física de v . De moment, sabem que f és de la forma següent:

$$\begin{cases} x'^1 &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 - v a_4^4 t \\ x'^2 &= a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 \\ x'^3 &= a_2^3 x^2 + a_3^3 x^3 \\ t' &= a_1^4 x^1 + a_2^4 x^2 + a_3^4 x^3 + a_4^4 t . \end{cases} \quad (14.1)$$

Imposem, ara, el principi d'invariància de la velocitat de la llum. Suposem que a l'instant $t = 0$ de S s'emet un raig lluminós des de l'origen de S en totes direccions. Aquest senyal haurà arribat a l'instant t als punts (x^1, x^2, x^3) tals que $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = c^2 t^2$. Ara bé, com que per a $t = 0$ els orígens de S i S' coincideixen i era també $t' = 0$, el senyal lluminós, per a un observador de S' , haurà sortit del seu origen al seu instant inicial. Per tant, a l'instant t' haurà arribat als punts (x'^1, x'^2, x'^3) tals que $(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 = c^2 t'^2$. Considerem ara un personatge qualsevol, de nom Joan, que viatja per l'espai. Considerem l'esdeveniment següent: "En Joan comença a veure el senyal lluminós". Per a un observador de S aquest esdeveniment tindrà coordenades (x^1, x^2, x^3, t) tals que

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2 t^2 = 0 . \quad (14.2)$$

Per a un observador de S' el mateix esdeveniment tindrà coordenades (x'^1, x'^2, x'^3, t') tals que

$$(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 - c^2 t'^2 = 0 . \quad (14.3)$$

La correspondència f ha d'aplicar, doncs, els punts (x^1, x^2, x^3, t) que compleixen (14.2) en els punts (x'^1, x'^2, x'^3, t') que compleixen (14.3). Sigui $Q(x^1, x^2, x^3, t)$ l'expressió que s'obté de $(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 - c^2 t'^2$ substituint x'^1, x'^2, x'^3, t' en funció de x^1, x^2, x^3, t per les fórmules (14.1). $Q(x^1, x^2, x^3, t)$ serà una forma quadràtica en x^1, x^2, x^3, t . Sempre que (x^1, x^2, x^3, t) compleixin (14.2) haurà de ser $Q(x^1, x^2, x^3, t) = 0$ i recíprocament (fent el mateix raonament amb la transformació inversa). Això fa que el con de $\mathbf{R}^4$ donat per (14.2) hagi de ser també la quàdrica $Q(x^1, x^2, x^3, t) = 0$. Això fa que hagi d'existir una constant $\rho \neq 0$ tal que

$$Q(x^1, x^2, x^3, t) = \rho((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2 t^2) . \quad (14.4)$$

Sabent tot això sobre f , passem a estudiar la transformació induïda per f sobre el pla de $\mathbf{R}^4$ d'equacions $x^2 = 0$, $x^3 = 0$. Com que

$$f: (x^1, 0, 0, t) \longrightarrow (x'^1, 0, 0, t')$$

(això es dedueix de (14.1)), estudiem la transformació de dues variables

$$\begin{cases} x' &= a_1^1 x - v a_4^4 t \\ t' &= a_1^4 x + a_4^4 t, \end{cases} \quad (14.5)$$

on hem posat, per comoditat, x i x' en lloc de x^1 i x'^1 . De (14.4) deduïm

$$Q(x, 0, 0, t) = \rho(x^2 - c^2 t^2).$$

Igualant els coeficients del primer i segon membre de l'expressió anterior, tindrem

$$(a_1^1)^2 - c^2 (a_1^4)^2 = \rho \quad (\text{termes en } x^2) \quad (14.6)$$

$$(a_4^4)^2 v^2 - c^2 (a_4^4)^2 = -\rho c^2 \quad (\text{termes en } t^2) \quad (14.7)$$

$$-v a_1^1 a_4^4 - c^2 a_1^4 a_4^4 = 0 \quad (\text{termes en } xt) . \quad (14.8)$$

De (14.8) s'obté $a_1^4 = -v a_1^1 / c^2$, i substituint a (14.6) s'obté

$$\rho = (1 - v^2/c^2) (a_1^1)^2 .$$

De (14.7) s'obté

$$\rho = (1 - v^2/c^2) (a_4^4)^2 .$$

Per tant, $(a_1^1)^2 = (a_4^4)^2$. Canviant, si cal, la referència S' per una altra que tingui els mateixos eixos, però on l'orientació de l'eix de les x' sigui la contrària, podem aconseguir $a_1^1 > 0$. Com que $a_4^4 > 0$, la igualtat anterior implicarà $a_1^1 = a_4^4$. Resumint, (14.5) s'escriurà

$$\begin{cases} x' &= a_4^4 x - a_4^4 v t \\ t' &= -(v a_4^4 / c^2) x + a_4^4 t. \end{cases} \quad (14.9)$$

Perquè (14.9) tingui inversa, el determinant de la seva matriu ha ser $\neq 0$, la qual cosa implica $|v| \neq c$. La transformació inversa de (14.9) és

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{a_4^4(1 - v^2/c^2)} x' + \frac{v}{a_4^4(1 - v^2/c^2)} t' \\ t &= \frac{v}{c^2 a_4^4(1 - v^2/c^2)} x' + \frac{1}{a_4^4(1 - v^2/c^2)} t'. \end{cases} \quad (14.10)$$

Fem ara l'experiment c) de la definició de sistemes equivalents. Es consideren dos esdeveniments ocorreguts a l'origen de S i separats per un interval de temps de longitud 1. Suposem, per exemple, que el primer ha tingut lloc a l'instant $t = 0$ i el segon a l'instant $t = 1$. El primer esdeveniment és vist des de S' a l'origen de coordenades i el segon (en virtut de (14.9)) és vist en el punt $x' = -a_4^4 v$. La distància entre aquests dos punts, mesurada a S' , és $a_4^4 |v|$ (la distància sempre és positiva!). Fem el mateix experiment intercanviant els papers de S i S' . La distància que trobarem llavors, utilitzant (14.10), serà $|v|/a_4^4(1 - v^2/c^2)$. Com que el valor obtingut ha de ser el mateix, s'haurà de complir

$$a_4^4 = \frac{1}{a_4^4(1 - v^2/c^2)}.$$

Això implica $1 - v^2/c^2 > 0$. Per tant $|v| < c$. D'aquí deduïm també

$$a_{44} = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

A més,

$$\rho = (1 - v^2/c^2)(a_4^4)^2 = 1.$$

Portem a (14.1) els valors fins ara obtinguts. Per abreviar, anomenem α l'arrel quadrada $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Tindrem

$$\begin{cases} x'^1 &= (1/\alpha)x^1 & + a_2^1 x^2 & + a_3^1 x^3 & - (v/\alpha)t \\ x'^2 &= & a_2^2 x^2 & + a_3^2 x^3 & \\ x'^3 &= & a_2^3 x^2 & + a_3^3 x^3 & \\ t' &= -(v/c^2\alpha)x^1 & + a_2^4 x^2 & + a_3^4 x^3 & + (1/\alpha)t. \end{cases} \quad (14.11)$$

A més, tenim

$$\begin{aligned} (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 - c^2 t'^2 &= Q(x^1, x^2, x^3, t) = \\ &= (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2 t^2 \end{aligned} \quad (14.12)$$

(recordem que $\rho = 1$). Igualant els termes en $x^2 x^1$ dels dos últims membres de la igualtat anterior, tindrem

$$(1/\alpha)a_2^1 + (v/\alpha)a_2^4 = 0.$$

Igualant els termes en $x^2 t$, tindrem

$$-a_2^1(v/\alpha) - c^2 a_2^4/\alpha = 0.$$

De la primera d'aquestes igualtats, tindrem $a_2^1 = va_2^4$. Substituint a la segona,

$$v^2 a_2^4 - c^2 a_2^4 = 0.$$

Com que $v^2 < c^2$, això implica $a_2^4 = 0$. Per tant, $a_2^1 = -va_2^4 = 0$. Fent el mateix raonament amb els termes $x^1 x^3$ i $x^1 t$ de (14.12) obtenim $a_3^1 = a_3^4 = 0$. Resumint, (14.11) ens queda així:

$$\begin{cases} x'^1 = (1/\alpha)x^1 - (v/\alpha)t \\ x'^2 = a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 \\ x'^3 = a_2^3 x^2 + a_3^3 x^3 \\ t' = -(v/c^2\alpha)x^1 + (1/\alpha)t. \end{cases} \quad (14.13)$$

A més, s'ha de complir (14.12). De la forma explícita de (14.13) observem que ja es compleix $(x'^1)^2 - c^2 t'^2 = (x^1)^2 - c^2 t^2$. Per tant, per tal que es compleixi (14.12), haurà de ser $(x'^2)^2 + (x'^3)^2 = (x^2)^2 + (x^3)^2$. Això ens diu que la transformació

$$\begin{cases} x'^2 = a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 \\ x'^3 = a_2^3 x^2 + a_3^3 x^3 \end{cases} \quad (14.14)$$

conserva les distàncies. Fem en el pla x^2, x^3 dels eixos de S el canvi (isomètric) d'eixos donat per (14.14). Si tornem a designar per S la referència així obtinguda, llavors el pas de S a S' vindrà donat per

$$\begin{cases} x'^1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}x^1 - \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \\ t' = -\frac{v}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}x^1 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t. \end{cases} \quad (14.15)$$

Resumint, el que hem provat ha estat el resultat següent:

Teorema 14.9 *Siguin S i S' dos sistemes inercials. Podem fer canvis ortogonals d'eixos a S i S' (és a dir, canvis que conservin les distàncies i els angles)*

i un canvi d'origen de temps en els dos sistemes de manera que el canvi entre els dos nous sistemes vingui donat per (14.15).

Donem ara una interpretació física del nombre v que apareix a (14.15). Observem que la transformació inversa de (14.15) ve donada per

$$\left\{ \begin{array}{l} x^1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}x'^1 + \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t' \\ x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3 \\ t = \frac{v}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}x'^1 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t' . \end{array} \right.$$

A l'origen de S' ($x'^1 = 0, x'^2 = 0, x'^3 = 0$), la relació entre el temps t i el temps t' serà $t = (1/\sqrt{1-v^2/c^2})t'$. L'origen de S' serà vist des de S en el punt

$$x^1 = \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t' = vt, \quad x^2 = 0, \quad x^3 = 0.$$

Per tant, l'origen de S' es mou respecte a S amb moviment rectilini uniforme de velocitat $\vec{v} = (v, 0, 0)$. Això dóna una interpretació física del nombre v que apareix a les transformacions de (14.15).

4 Revisió dels postulats de la relativitat especial

Les transformacions (14.15) no tenen sentit si la velocitat amb què es desplaça el sistema inercial S' respecte a S és c . Recordem que a mitja demostració de les fórmules (14.15) hem hagut de suposar $|v| \neq c$ i després hem deduït $|v| < c$. No obstant això, quan hem enunciat el principi de relativitat, a la condició B), hem exigit l'existència de sistemes inercials que viatgen respecte a S amb velocitat finita *qualsevol*. D'altra banda, segons el corollari 14.8, f ha de transformar hiperplans de la forma $t = \text{constant}$ en $t' = \text{constant}$. Tanmateix, observant (14.15), veiem que això no es compleix. Per tant, la teoria és contradictòria. Això implica que els postulats dels quals hem partit són incompatibles. Intuïm fàcilment que l'única contradicció pot derivar del fet d'haver permès velocitats qualssevol a la condició B) del principi de relativitat.

Els dos postulats de la relativitat especial els hauríem d'enunciar conjuntament, com un sol postulat, de la manera següent:

Postulat de relativitat i d'invariància de la velocitat de la llum. Existeix una classe privilegiada de sistemes de referència, cada un dels quals serà anomenat inercial, i una constant física positiva c amb les dimensions d'una velocitat, que compleixen les propietats següents:

- A) Si S és inercial, també ho és tot sistema S' immòbil respecte a S que s'obtingui de S per un desplaçament d'eixos i un canvi d'origen de temps.
- B) Si S és inercial, i P és un punt mòbil que viatja respecte a S amb moviment rectilini uniforme de velocitat donada $\vec{v}$, amb $\|\vec{v}\| < c$, existeix un sistema inercial S' que té origen P .
- C) Dos sistemes inercials S i S' són sempre equivalents.
- D) Els observadors que viatgen en un sistema inercial poden enunciar les lleis físiques d'igual manera, independentment del sistema inercial on es troben.
- E) Si un observador, immòbil respecte a un sistema inercial S , contempla la propagació en el buit d'un raig instantani de llum, emès per qualsevol focus lluminós, observarà que es propaga amb moviment rectilini uniforme respecte a S .
- F) El mòdul del vector velocitat d'un tal raig de llum és c , independentment del sistema inercial.

De la redacció primitiva, veiem que només hem modificat lleugerament la condició B). Però aquest punt ara modificat, intervenia amb el seu enunciat primitiu en la demostració del lema 14.4, el qual era essencial per a la demostració del teorema 14.7, que intervenia en l'obtenció de l'expressió (14.15). ¿Com es pot arreglar tot això? Mostrarem els canvis que s'han de fer en les demostracions de l'apartat 3 a fi d'arribar als mateixos resultats.

Definició 14.10 Un vector $\vec{u} = (u^1, u^2, u^3, u^4)$ de $\mathbf{R}^4$ s'anomena temporal (en anglès, time-like) si compleix la condició

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 < c^2(u^4)^2.$$

Si considerem el con C de $\mathbf{R}^4$ definit per $\{(x^1, x^2, x^3, t) \text{ tals que } (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2 t^2 < 0\}$ (figura 14.1), dir que $\vec{u}$ és temporal equival a dir que $u \in C$. Aquest con consta de dues components connexes, C^+ i C^- . Anomenem C^+ la component connexa de C continguda en el semiespai $t > 0$. Els vectors temporals $\vec{u}$ tals que $\vec{u} \in C^+$ seran anomenats vectors temporals positius.

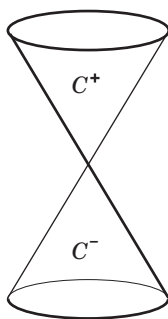


Figura 14.1

Siguin S i S' dos sistemes inercials, i f l'aplicació de $\mathbf{R}^4$ en $\mathbf{R}^4$ originada pel canvi de S a S' . Si r és una recta de $\mathbf{R}^4$ de vector director temporal $\vec{u} = (u^1, u^2, u^3, u^4)$, com que $\vec{u}/u^4$ continua essent vector director de r i, a més, és temporal, r podrà parametritzar-se de la manera següent:

$$\begin{cases} x^i = x^i(t) = v^i t + b^i; & i = 1, 2, 3 \\ t = t, \end{cases}$$

amb $(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 < c^2$. Aquesta recta de $\mathbf{R}^4$ representarà, per a un observador de S , el moviment d'un punt $P(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ a l'espai ordinari, que viatja amb velocitat $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$ tal que $\|\vec{v}\| < c$.

La demostració del lema 14.4 de l'apartat 3 es podrà acabar de copiar en la situació d'ara i donarà el resultat següent:

Lema 14.11 *Si r és una recta de $\mathbf{R}^4$ amb vector director temporal, $f(r)$ és una recta de $\mathbf{R}^4$ que també té vector director temporal.*

Definició 14.12 *Direm que un pla de $\mathbf{R}^4$ (respectivament, un hiperplà) és admissible si és de la forma $a + H$, on H és un subespai vectorial de dimensió 2 (respectivament, de dimensió 3) que admet una base formada per vectors de C^+ .*

La demostració del lema 14.5 es pot adaptar aquí totalment i dóna el lema següent:

Lema 14.13 *Si V és un pla admissible de $\mathbf{R}^4$, $f(V)$ és un pla admissible.*

Un raonament anàleg prova:

Lema 14.14 *f transforma hiperplans admissibles en hiperplans admissibles.*

Utilitzant ara aquests lemes provarem el teorema següent:

Teorema 14.15 *f és una afinitat.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin v_1, v_2, v_3, v_4 quatre vectors de C^+ linealment independents. Siguin a_1, a_2, a_3, a_4 quatre eixos que passin per un origen P i que tinguin com a vectors directors respectius v_1, v_2, v_3 i v_4 . Aquests eixos, naturalment, no seran perpendiculars. Siguin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les imatges per f de a_1, a_2, a_3 i a_4 . Les α_i seran rectes pel lema 14.11. Sigui $Q = P + v_1 + v_2 + v_3 + v_4$. Existeix una única afinitat, g , que transforma els eixos a_i en α_i , l'origen P en $f(P)$, i Q en $f(Q)$. Per provar que f és una afinitat basta provar que $g^{-1}f$ és la identitat (llavors $f = g$). Sigui $\varphi = g^{-1}f$. φ compleix les propietats següents:

- a) φ és bijectiva.
- b) φ transforma rectes de vector director temporal en rectes. També transforma plans i hiperplans admissibles en plans i hiperplans.
- c) φ deixa fixos els eixos i el punt Q .

Vegem que una aplicació amb aquestes propietats ha de ser la identitat. φ haurà de transformar rectes paral·leles de vector director temporal en rectes paral·leles. En efecte, dues rectes tals, r_1 i r_2 , estan contingudes en un pla admissible. Per tant, $\varphi(r_1)$ i $\varphi(r_2)$ seran coplanàries. Si $\varphi(r_1)$ i $\varphi(r_2)$ es tallessin, φ no seria bijectiva.

Com que els eixos queden fixos per φ , tota recta paral·lela als eixos s'ha de transformar per φ en una altra recta paral·lela als eixos. Això fa que plans i hiperplans paral·lels als plans i hiperplans determinats pels eixos es transformin en plans i hiperplans paral·lels a aquests.

La recta que uneix P i Q té com a vector director $w = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \in C^+$. La seva imatge serà, doncs, una recta (per (b)) que haurà de contenir P i Q , ja que P i Q queden fixos per φ . Per tant, φ deixa fixa la recta PQ . Això vol dir que $\varphi(P + \lambda w)$ haurà de ser de la forma $P + \mu w$. Considerem l'aplicació σ de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ que a cada λ li fa correspondre el μ obtingut pel procediment anterior. σ és, doncs, una aplicació de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ definida mitjançant φ . Vegem que un punt de la forma $P + \lambda v_i$, per a $i = 1, 2, 3, 4$, es transforma per φ en $P + \sigma(\lambda)v_i$. Suposem, per exemple, que $i = 1$. Per a λ fixat, el punt $P + \lambda v_1$ és el punt d'intersecció de l'eix $P + \langle v_1 \rangle$ amb l'hiperplà $P + \lambda w + \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$. L'eix anterior

queda fix per φ , i l'hiperplà s'haurà de transformar en un hiperplà paral·lel que contingui el punt $P + \sigma(\lambda)w$ (que és el transformat de $P + \lambda w$). Aquest hiperplà és, doncs, $P + \sigma(\lambda)w + \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$. El punt d'intersecció d'aquest hiperplà amb l'eix $P + \langle v_1 \rangle$ és $P + \sigma(\lambda)v_1$, tal com volíem demostrar.

Provem ara que un punt x qualsevol, $x = P + \lambda^1 v_1 + \dots + \lambda^4 v_4$, es transforma per φ en el punt $P + \sigma(\lambda^1)v_1 + \dots + \sigma(\lambda^4)v_4$. En efecte, el punt x és el punt d'intersecció dels quatre hiperplans

$$H_i = P + \lambda^i v_i + \langle v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_4 \rangle,$$

per a $i = 1, 2, 3, 4$, on $\langle v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_4 \rangle$ indica que v_i no hi és. Per exemple,

$$H_1 = P + \lambda^1 v_1 + \langle v_2, v_3, v_4 \rangle.$$

Un tal hiperplà s'ha de transformar, per φ , en un hiperplà paral·lel que contingui la imatge de $P + \lambda^1 v_1$, que és $P + \sigma(\lambda^1)v_1$. La imatge per φ de H_1 és, doncs, l'hiperplà $P + \sigma(\lambda^1)v_1 + \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$. La imatge per φ de x serà, doncs, el punt d'intersecció dels quatre hiperplans $P + \sigma(\lambda^i)v_i + \langle v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_4 \rangle$, que és $P + \sigma(\lambda^1)v_1 + \dots + \sigma(\lambda^4)v_4$.

Per demostrar que φ és la identitat, bastarà provar que σ és la identitat. Provem que σ és un automorfisme del cos $\mathbf{R}$, és a dir, una aplicació bijectiva de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ tal que $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$ i $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$. Com que l'únic automorfisme de $\mathbf{R}$ és la identitat, això provarà que σ és la identitat.

φ deixa fix el punt $Q' = P + v_1 + v_2$. En efecte, aquest punt és el punt d'intersecció del pla $Q + \langle v_3, v_4 \rangle = P + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \langle v_3, v_4 \rangle$ amb el pla $P + \langle v_1, v_2 \rangle$, i tots dos plans queden fixos per φ . Amb aquesta observació demostrarem que σ és un automorfisme sense sortir-nos del pla $P + \langle v_1, v_2 \rangle$. En aquest pla, els eixos $P + \langle v_1 \rangle$ i $P + \langle v_2 \rangle$ queden fixos per φ , la recta PQ' queda fixa i σ està relacionat amb φ per $\varphi(P + \lambda v_1) = P + \sigma(\lambda)v_1$. Com que estem en dimensió 2, prenem la recta $P + \langle v_1 \rangle$ com a eix de les x i la recta $P + \langle v_2 \rangle$ com a eix de les y . El punt P serà l'origen, Q' serà $(1, 1)$, i $(\sigma(x), 0)$ serà $\varphi(x, 0)$.

La figura 14.2 mostra com es pot construir geomètricament el punt $(a+b, 0)$ a partir dels punts $(a, 0)$ i $(b, 0)$. La figura 14.3 mostra geomètricament el punt $(ab, 0)$ a partir dels punts $(a, 0)$ i $(b, 0)$.

Suposem que totes les rectes de les figures 14.2 i 14.3 es transformen per φ en rectes, cosa que encara no sabem. (Només sabem que rectes de vector director temporal es transformen en rectes.) Com que els eixos i els punts $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ queden fixos per φ , la imatge de les figures 14.2 i 14.3 donaria dibuixos anàlegs on en comptes de $(a, 0)$ hi hauria $(\sigma(a), 0)$, en comptes de $(b, 0)$, $(\sigma(b), 0)$, etc. Això demostraria que $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$ i $\sigma(ab) =$

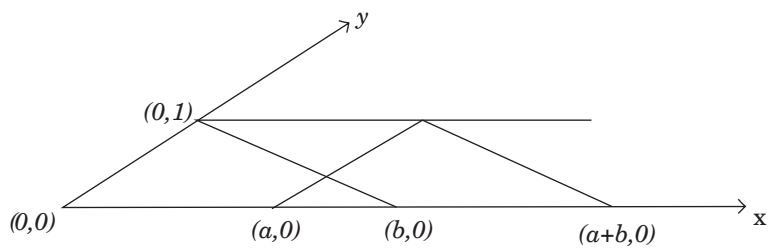


Figura 14.2

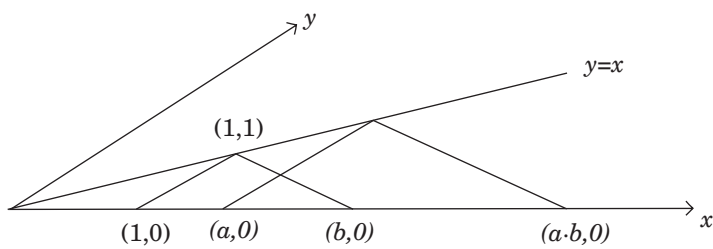


Figura 14.3

$\sigma(a)\sigma(b)$. Com que els eixos i les rectes paral·leles als eixos tenen vector director temporal, l'única recta de la figura 14.2 que no sabem si té vector director temporal o no, és la que uneix $(0, 1)$ amb $(b, 0)$. Si b fos pròxim a zero ($|b| < \varepsilon$), aquesta recta seria pròxima a l'eix de les y , i per tant, tindria vector director temporal. Per tant, en aquest cas, totes les rectes de la figura 14.2 tindrien vector director temporal i $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$. Per tant, podem enunciar el següent: existeix $\varepsilon > 0$ tal que per a tot b tal que $|b| < \varepsilon$ i per a qualsevol a es compleix $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$. No obstant això, d'aquí es dedueix que aquesta última propietat es compleix per a tot a i tot b . Quan b és pròxim a 1 totes les rectes de la figura 14.2 tenen vector director temporal i un raonament anàleg prova que $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$. ■

5 Conseqüències de les transformacions de Lorentz

Siguin S i S' dos sistemes inercials tals que el canvi de S a S' vingui donat per (14.15). Sigui A un punt immòbil respecte a S situat sobre l'eix de les x de S , $A = (A^1, 0, 0)$. Mostrem on és vist aquest punt per un observador de S' a l'instant t'_0 . Aquest punt tindrà unes coordenades (x', y', z', t'_0) que seran solució del sistema

$$\begin{cases} x' = \frac{A^1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = 0 \\ z' = 0 \\ t'_0 = \frac{-(v/c^2)A^1 + t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{cases}$$

Aïllant t a l'última equació i substituint a la primera, tenim

$$x' = A^1 \sqrt{1 - v^2/c^2} - vt'_0.$$

Resumint, el punt A és vist des de S' a l'instant t'_0 com el punt de coordenades

$$(A^1 \sqrt{1 - v^2/c^2} - vt'_0, 0, 0).$$

Sigui B un altre punt de S de coordenades $B = (B^1, 0, 0)$, amb $B^1 - A^1 = 1$. El segment $\overline{AB}$ té longitud 1 a S . B serà vist des de S' a l'instant t'_0 com el

punt de coordenades

$$\left(B^1 \sqrt{1 - v^2/c^2} - vt'_0, 0, 0 \right).$$

Així doncs, un observador de S' atribuirà al segment anterior la distància $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Això vol dir que un “metre” de S , vist des de S' , no té pas longitud 1, sinó $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Per tant, les longituds s'escurcen en la direcció del moviment. Expliquem una mica més què és el que això significa. Suposem que els observadors de S col·loquen una barra d'1 metre seguint la direcció del moviment de l'origen de S' (que descriu, en el seu moviment, una recta). Imaginem ara que en el sistema S' hi ha infinits observadors immòbils, un en cada punt de l'espai, amb rellotges sincronitzats. Imaginem que aquests observadors s'han posat prèviament d'acord perquè quan els seus rellotges marquin una hora convinguda t'_0 , els dos observadors que vegin cada un d'ells en aquell moment un extrem de la barra allà on són ells, aixequin la mà. Posteriorment, utilitzant les unitats de mesura de S' , es mesura la distància entre els dos observadors que hagin aixecat la mà. Doncs bé, la distància que trobaran no serà pas 1 metre, sinó $\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Suposem ara dos esdeveniments que tenen lloc en un mateix punt A de S , $A = (A^1, A^2, A^3)$, en instants de temps diferents, t_0 i t_1 . Aquests esdeveniments són vistos des de S' en els instants t'_0 i t'_1 donats per

$$t'_i = \frac{-(v/c^2)A^1 + t_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad i = 0, 1.$$

Per tant,

$$t'_1 - t'_0 = \frac{t_1 - t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Els intervals de temps es dilaten, doncs, pel moviment. Expliquem, com abans, què és el que això significa. Un observador de nom Jaume, situat a l'origen de S , diu “ara” a l'instant inicial del seu rellotge i torna a dir “ara” al cap d'un segon. Dels infinits observadors que hi ha a S' , l'observador que veu en Jaume davant seu la primera vegada que diu “ara”, mira el temps t'_0 que marca el seu rellotge quan això succeeix. Anàlogament, l'observador de S' que veu davant seu en Jaume quan diu “ara” la segona vegada, observa el temps t'_1 que marca el seu rellotge quan això s'esdevé. La diferència $t'_1 - t'_0$ (els rellotges de S' estan tots sincronitzats), no serà pas 1 segon, sinó que serà $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Suposem ara dos esdeveniments que tenen lloc en punts diferents de S , $A = (A^1, A^2, A^3)$, $B = (B^1, B^2, B^3)$, en el mateix instant de temps t_0 . És a

dir, són simultanis per a un observador de S . Aquests esdeveniments seran vistos per un observador de S' en els instants t'_1 i t'_2 donats per

$$t'_1 = \frac{-(v/c^2)A^1 + t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t'_2 = \frac{-(v/c^2)B^1 + t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Si $A^1 \neq B^1$, els esdeveniments deixen de ser simultanis per a un observador de S' .

6 Forma vectorial de les transformacions de Lorentz

A l'apartat 4 hem vist que podíem elegir els eixos de S i S' de forma convenient, i els orígens de temps, perquè el canvi de l'un a l'altre vingués donat per (14.15). Ara ens interessaria tenir unes fórmules senzilles, anàlogues a (14.15), que servissin per a passar d'un sistema S a un altre S' qualsevol, sense que ens haguéssim de preocupar prèviament de canviar els eixos de S i S' de manera convenient.

Suposem, de moment, que els eixos de S i S' estan “ben posats” de manera que valgui (14.15). Designem per $\vec{r}$ el vector (x, y, z) i per $\vec{r}'$ el vector (x', y', z') . Volem escriure la transformació (14.15) de la forma $(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{r}', t')$. Per abreujar, designem per α l'arrel quadrada $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Llavors (14.15) es pot escriure

$$\begin{cases} x' = x + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)x - \frac{v}{\alpha}t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = -\frac{v}{c^2\alpha}x + \frac{1}{\alpha}t \end{cases} \quad (14.16)$$

De les tres primeres equacions deduïm

$$\vec{r}' = \vec{r} + \left(\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)x - \frac{v}{\alpha}t, 0, 0\right).$$

Ara bé, $\left(\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)x - \frac{v}{\alpha}t, 0, 0\right) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)x\vec{e}_1 - \frac{v}{\alpha}t\vec{e}_1$, on $\vec{e}_1 = (1, 0, 0) = \frac{\vec{v}}{v}$, on $\vec{v}$ és el vector velocitat de S' respecte a S (recordem que $\vec{v} = (v, 0, 0)$). D'altra banda,

$$x = \vec{r} \cdot \vec{e}_1 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v},$$

on el punt indica “producte escalar euclidià” a $\mathbf{R}^3$. Resumint, tenim

$$\vec{r}' = \vec{r} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} - \frac{t}{\alpha} \vec{v}.$$

L'última equació de (14.16) s'escriu

$$t' = -\frac{1}{c^2 \alpha} \vec{r} \cdot \vec{v} + \frac{t}{\alpha}.$$

Per tant, (14.16) s'escriu

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} + \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} - \frac{t}{\alpha} \right\} \vec{v} \\ t' = -\frac{1}{c^2 \alpha} \vec{r} \cdot \vec{v} + \frac{t}{\alpha}. \end{cases} \quad (14.17)$$

I les seves inverses (canviant $\vec{v}$ per $-\vec{v}$) s'escriuen

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v^2} + \frac{t'}{\alpha} \right\} \vec{v} \\ t = \frac{1}{c^2 \alpha} \vec{r}' \cdot \vec{v} + \frac{t'}{\alpha}. \end{cases} \quad (14.18)$$

Les fórmules (14.17) són les mateixes que (14.15) però escrites vectorialment. Com que qualsevol canvi ortogonal d'eixos respecta el producte escalar de $\mathbf{R}^3$, (14.17) valdrà independentment de les posicions dels eixos de S i S' , sempre que en els orígens de temps coincideixin els orígens. Anàlogament, (14.18) són les inverses de (14.15) i valen per a qualsevol posició dels eixos de S i S' (amb la mateixa condició sobre els orígens).

7 Llei de composició de velocitats

Sigui P un punt material que es mou respecte a un sistema inercial S . Anomenem $\vec{r}(t)$ el vector posició de P respecte a S , a l'instant t . Sigui S' un altre sistema inercial. Anomenem $\vec{r}'(t')$ el vector posició de P respecte a S' a l'instant t' . La velocitat $\vec{u}$ de P respecte a S a l'instant t serà

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}.$$

La velocitat $\vec{u}'$ de P respecte a S' a l'instant t' serà

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'(t')}{dt'}.$$

Per derivació de (14.18) s'obté

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}'}{dt'} + \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \frac{1}{v^2} \frac{d\vec{r}'}{dt'} \cdot \vec{v} + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right\} \vec{v} \right] \frac{dt'}{dt},$$

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1 + (\vec{u}' \cdot \vec{v})/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Per tant, ens queda

$$\vec{u} = \frac{1}{1 + (\vec{u}' \cdot \vec{v})/c^2} \left[\sqrt{1-v^2/c^2} \vec{u}' + \left(1 - \sqrt{1-v^2/c^2} \right) \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} + \vec{v} \right].$$

És a dir,

$$\vec{u} = \frac{1}{1 + (\vec{u}' \cdot \vec{v})/c^2} \left[\left(\frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} + 1 \right) \vec{v} + \sqrt{1-v^2/c^2} \left(\vec{u}' - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) \right],$$

que és la llei relativista de composició de velocitats. Si v/c^2 és petit, queda $\vec{u} \cong \vec{u}' + \vec{v}$, que és la llei clàssica.

8 L'espai de Minkowski

Sabem que les transformacions de Lorentz que transformen l'origen en l'origen conserven la forma quadràtica de $\mathbf{R}^4$ $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2 t^2$. Definim ara a $\mathbf{R}^4$ el següent producte escalar g . Si $X = (X^1, X^2, X^3, X^4)$ i $Y = (Y^1, Y^2, Y^3, Y^4)$,

$$g(X, Y) = X^1 Y^1 + X^2 Y^2 + X^3 Y^3 - c^2 X^4 Y^4.$$

Proposició 14.16 *Les transformacions de Lorentz que transformen l'origen en l'origen, conserven el producte escalar anterior. És a dir, si f és una transformació de Lorentz que transforma l'origen en l'origen,*

$$g(X, Y) = g(f(X), f(Y)).$$

DEMOSTRACIÓ. Observem que

$$g(X, Y) = \frac{1}{2} \{g(X + Y, X + Y) - g(X, X) - g(Y, Y)\}$$

(això es desprèn de la bilinealitat de g respecte als dos arguments). Ara bé, sabem (vegeu l'apartat 3) que f conserva la forma quadràtica

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2 t^2 = g((x^1, x^2, x^3, t), (x^1, x^2, x^3, t)).$$

Per tant, f conservarà $g(X, X)$, $g(Y, Y)$ i $g(X + Y, X + Y)$. ■

Sigui C el con de $\mathbf{R}^4$ format pels vectors $X = (x^1, x^2, x^3, t)$ tals que $g(X, X) < 0$. C consta de dues components connexes, C^+ i C^- . Anomenem C^+ la component connexa continguda en el semiespai $t > 0$. Un vector $\vec{u}$ de $\mathbf{R}^4$ tal que $\vec{u} \in C$ s'anomena temporal. Un vector $\vec{u}$ tal que $\vec{u} \in C^+$ s'anomena temporal positiu (tot això ja ha estat introduït a l'apartat 4).

Proposició 14.17 *Sigui f una transformació de Lorentz que transforma l'origen en l'origen. Llavors $f(C^+) = C^+$.*

DEMOSTRACIÓ. De la proposició anterior es desprèn que $f(C) = C$. Com que f , pel fet de ser lineal, és contínua, haurà de transformar la component connexa C^+ de C en una component connexa de C . Per veure que $f(C^+)$ és precisament C^+ , mirem on és la imatge per f del vector $(0, 0, 0, 1)$ de C^+ . Pel teorema 14.9 (de l'apartat 3), $f = h' \circ F \circ h$, on F és una transformació donada per les fórmules (14.15) (apartat 3), i h i h' són transformacions de $\mathbf{R}^4$ de la forma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^4 \\ (\vec{x}, t) & \longrightarrow & (H(\vec{x}), t) \end{array},$$

on H és una isometria lineal de $\mathbf{R}^3$ amb la mètrica euclidiana usual. Tindrem

$$f(0, 0, 0, 1) = h' F h(0, 0, 0, 1) = h F(0, 0, 0, 1),$$

ja que $h(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$. Ara bé, com que F és de la forma (14.15), veiem (substituint a (14.15)) que $F(0, 0, 0, 1) \in C^+$. És evident, d'altra banda, que h' transforma C^+ en C^+ . Per tant, $f(0, 0, 0, 1) \in C^+$. ■

Imaginem que viatgem en un sistema inercial S . Sigui S' un altre sistema inercial. Els observadors del nostre sistema representen els esdeveniments per punts de $\mathbf{R}^4$. Ara bé, els observadors de S' també representen els esdeveniments per punts de $\mathbf{R}^4$, però per punts diferents dels que hem utilitzat nosaltres. Així per exemple, si representem un esdeveniment pel punt $x \in \mathbf{R}^4$, els observadors de S' el representaran per $f(x)$, on $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ és la transformació de Lorentz donada pel canvi de sistema inercial de S a S' . Sabem que f és una afinat i, per tant, de la forma $f(\vec{x}) = F(\vec{x}) + \vec{a}$, amb F lineal. Designem per $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canònica de $\mathbf{R}^4$, i per ε_i l'element $F^{-1}(e_i)$. Considerem ara els quatre eixos de $\mathbf{R}^4$ determinats per les rectes d'origen $f^{-1}(0)$ i vectors directors ε_i . Si $y = f(x)$ té coordenades (y^1, y^2, y^3, y^4) en els eixos canònics de $\mathbf{R}^4$, x referit als eixos que acabem d'introduir, també té les mateixes coordenades (y^1, y^2, y^3, y^4) . En efecte, $f(x) = y = \sum y^i e_i$, $f(x) = F(x) + a$. Per tant, $F(x) + a = \sum y^i e_i$. O sigui, $x = F^{-1}(\sum y^i e_i - a) = \sum y^i \varepsilon_i - F^{-1}(a)$. Observem

ara que $f(F^{-1}(-a)) = F(F^{-1}(-a)) + a = 0$. Per tant, $F^{-1}(-a) = f^{-1}(0)$. Per tant, $x = \sum y^i \varepsilon_i + f^{-1}(0)$. O sigui, $x - f^{-1}(0) = \sum y^i \varepsilon_i$. Aquest càlcul mostra que els dos punts de vista següents són completament equivalents:

- 1) Els observadors de S' utilitzen, com nosaltres, els eixos canònics de $\mathbf{R}^4$. Ara bé, un esdeveniment que nosaltres representem pel punt $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, ells el representen pel punt $f(x) = (y^1, y^2, y^3, y^4)$.
- 2) Tant els observadors de S' com nosaltres representem un mateix esdeveniment per un mateix punt de $\mathbf{R}^4$. Ara bé, nosaltres utilitzem els eixos canònics de $\mathbf{R}^4$ i assignem a x els quatre nombres (x^1, x^2, x^3, x^4) , però els observadors de S' utilitzen uns altres eixos (els eixos de $\mathbf{R}^4$ d'origen $f^{-1}(0)$ i de vectors directors $\tilde{\varepsilon}_i$). Per aquesta raó ells assignen al punt x les coordenades (y^1, y^2, y^3, y^4) en lloc de les coordenades (x^1, x^2, x^3, x^4) que li assignàvem nosaltres.

Els vectors e_1, e_2, e_3, e_4 compleixen

$$\begin{cases} g(e_i, e_i) = 1 & \text{si } i = 1, 2, 3; & g(e_4, e_4) = -c^2 \\ g(e_i, e_j) = 0 & \text{si } i \neq j; & e_4 \in C^+ . \end{cases}$$

Per les proposicions 14.16 i 14.17, la base $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ complirà, també, les mateixes relacions.

Definició 14.18 *Anomenarem base orto-c-normal positiva tota base de $\mathbf{R}^4$ que compleixi les relacions anteriors.*

Si pensem $\mathbf{R}^4$ sense cap base privilegiada, elegir un sistema inercial S és equivalent, segons el punt de vista 2), a elegir una referència orto-c-normal positiva de $\mathbf{R}^4$. (Aquí una referència vol dir una base $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ i un origen.) L'espai $\mathbf{R}^4$ amb la mètrica g introduïda abans i l'elecció de la component connexa C^+ de C s'anomena espai de Minkowski.

Tots els fenòmens de la cinemàtica de la relativitat especial no són altra cosa que problemes geomètrics de l'espai de Minkowski.

Proposició 14.19 (Desigualtat de Schwarz, al revés) *A l'espai de Minkowski, si $\vec{v}$ és un vector temporal i $\vec{w}$ és qualsevol, es compleix*

$$g(v, w)^2 \geq g(v, v)g(w, w) .$$

Per demostrar aquesta proposició necessitem abans, un resultat auxiliar. Anomenem espai de Minkowski de dimensió 2 l'espai $\mathbf{R}^2$ dotat del producte escalar següent:

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = v^1 w^1 - c^2 v^2 w^2.$$

Lema 14.20 *A l'espai de Minkowski de dimensió 2 es compleix*

$$g(v, w)^2 \geq g(v, v)g(w, w)$$

per a v i w qualssevol.

DEMOSTRACIÓ. Es tracta de veure la desigualtat

$$(v^1 w^1 - c^2 v^2 w^2)^2 \geq \left((v^1)^2 - c^2 (v^2)^2\right) \left((w^1)^2 - c^2 (w^2)^2\right),$$

que, fent operacions, equival a

$$-2v^1 w^1 v^2 w^2 c^2 \geq -c^2 (v^2 w^1)^2 - c^2 (w^2 v^1)^2,$$

que equival a

$$(v^2 w^1)^2 + (w^2 v^1)^2 - 2v^1 w^1 v^2 w^2 \geq 0,$$

que equival a

$$(v^2 w^1 - w^2 v^1)^2 \geq 0,$$

que és certa sempre. ■

Utilitzant aquest lema, demostrarem la proposició 14.19.

DEMOSTRACIÓ DE LA PROPOSICIÓ. Considerem el subespai vectorial de $\mathbf{R}^4$ engendrat per $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Si $\vec{v} = \lambda \vec{w}$ llavors la desigualtat que es vol demostrar és òbviament certa (llavors és igualtat). Si no, el subespai engendrat per $\vec{v}$ i $\vec{w}$ té dimensió 2. Considerem sobre aquest subespai la mètrica induïda per la mètrica g de Minkowski de $\mathbf{R}^4$. El parell $(\langle v, w \rangle, g)$ és un espai de Minkowski de dimensió 2. En efecte, com que v és temporal, la mètrica g sobre $\langle v, w \rangle$ té índex ≥ 1 . No pot tenir índex 2 ja que la mètrica original té índex 1. Com que $(\langle v, w \rangle, g)$ és de Minkowski, el lema anterior ens dóna la desigualtat desitjada. ■

Proposició 14.21 (Desigualtat triangular, al revés) *A l'espai de Minkowski $\mathbf{R}^4$, si $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són de C^+ val la desigualtat següent:*

$$\frac{1}{i} \sqrt{g(v + w, v + w)} \geq \frac{1}{i} \sqrt{g(v, v)} + \frac{1}{i} \sqrt{g(w, w)}.$$

DEMOSTRACIÓ. Observem, en primer lloc, que si v i $w \in C^+$, llavors tant $g(v+w, v+w)$ com $g(v, v)$ i $g(w, w)$ són negatius. Per tant, les arrels són imaginàries. En dividir-les per i s'obtenen nombres reals ≥ 0 . Elevant al quadrat els dos membres, la desigualtat que volem provar equival a

$$-g(v+w, v+w) \geq -g(v, v) - g(w, w) - 2\sqrt{g(v, v)}\sqrt{g(w, w)}.$$

És a dir.

$$g(v+w, v+w) \leq g(v, v) + g(w, w) + 2\sqrt{g(v, v)}\sqrt{g(w, w)}.$$

Ara bé, com que

$$g(v+w, v+w) = g(v, v) + g(w, w) + 2g(v, w),$$

la desigualtat desitjada quedarà provada si demostrem que

$$g(v, w) \leq \sqrt{g(v, v)}\sqrt{g(w, w)}.$$

Ara bé, a l'espai de Minkowski de dimensió 2 es veu fàcilment que el producte escalar de dos vectors de C^+ és negatiu sempre. Per tant, $g(v, w)$, $g(v, v)$ i $g(w, w)$ són negatius. Els dos membres de la desigualtat anterior (que volem provar) són, doncs, negatius. Per tant, aquesta desigualtat és equivalent a la que s'obté elevant al quadrat els dos membres i canviant de signe. És a dir,

$$g(v, w)^2 \geq g(v, v)g(w, w).$$

Però aquesta desigualtat és, justament, la desigualtat de Schwarz de la proposició 14.19. ■

Definició 14.22 *Donats dos punts P_1 i P_2 de l'espai de Minkowski de dimensió 4, direm que P_1 és anterior a P_2 si el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ és de C^+ .*

Òbviament, si P_1 i P_2 són arbitraris, en general ni P_1 serà anterior a P_2 ni P_2 anterior a P_1 . Quan P_1 sigui anterior a P_2 , això voldrà dir que P_1 i P_2 representen esdeveniments tals que, contemplats des de qualsevol sistema inercial P_1 té lloc abans que P_2 .

9 Temps propi d'una partícula

Donar un sistema inercial S equival, segons hem dit, a escollir uns eixos a $\mathbf{R}^4$ amb vectors directors $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ que constitueixin una base orto-c-normal

positiva. Suposem elegit un sistema inercial. Sigui r una recta de $\mathbf{R}^4$ amb vector director temporal. Una recta així es podrà parametritzar per

$$\begin{cases} x^i = w^i t + b^i; & i = 1, 2, 3 \\ t = t, \end{cases} \quad (14.19)$$

amb $(w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2 < c^2$. Per a un observador de S , la recta r representarà el moviment d'una partícula P que es mou respecte a ell amb moviment uniforme de velocitat $\vec{w}$. Un tal observador podrà pensar que totes les rectes de $\mathbf{R}^4$ de vector director temporal representen moviments uniformes de partícules. Ara bé, per la condició B) del principi de relativitat, existirà un sistema inercial respecte al qual P està immòbil i és precisament l'origen d'aquest sistema. Sigui S' aquest sistema inercial. Siguin P_1 i P_2 dos punts arbitraris de la recta r . Com que r té vector director temporal, o bé P_1 serà anterior a P_2 o bé P_2 anterior a P_1 (definició de l'apartat anterior). Suposem P_1 anterior a P_2 . Per a un observador de S' aquests punts correspondran al seu origen, observat en instants de temps t'_1 i t'_2 amb $t'_1 < t'_2$. Un observador de S' representarà P_1 i P_2 per les coordenades $(0, 0, 0, t'_1)$ i $(0, 0, 0, t'_2)$. La distància a l'espai de Minkowski entre P_1 i P_2 , calculada des de S' , serà

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{g(P_2 - P_1, P_2 - P_1)} = ic(t'_2 - t'_1).$$

Per tant, l'interval de temps $t'_2 - t'_1$ en el sistema de referència per al qual P està immòbil és $d(P_1, P_2)/ic$. Ara bé, com que la distància a l'espai de Minkowski és un concepte intrínsec, qualsevol observador, sigui on sigui, si calcula $d(P_1, P_2)/ic$ tindrà l'interval de temps $t'_2 - t'_1$ en el sistema de referència per al qual P està immòbil (temps propi de P). Observem, també, que l'ordre en què qualsevol observador veu els esdeveniments corresponents a P_1 i P_2 no depèn tampoc de l'observador (perquè $\overrightarrow{P_1 P_2} \in C^+$).

Suposem ara una partícula P que viatja amb moviment rectilini uniforme respecte a un sistema inercial S , descrivint un segment rectilini $\overline{AB}$ a l'espai ordinari. Suposem, però, que quan arriba a B canvia sobtadament de direcció i passa a descriure, a partir d'aquell moment, un altre segment rectilini $\overline{BC}$, també amb moviment uniforme. Siguin t_A , t_B i t_C els instants en què P passa per A , B , i C respectivament. Un observador de S representarà el moviment d'aquesta partícula per una línia trencada de $\mathbf{R}^4$. Siguin P_A , P_B i P_C els punts de $\mathbf{R}^4$ que segons els observadors de S tenen coordenades (A^i, t_A) , (B^i, t_B) , (C^i, t_C) . Els vectors $\overrightarrow{P_A P_B}$ i $\overrightarrow{P_B P_C}$ són de C^+ . Suposem, ara, un observador que viatja amb la partícula P . Mentre la partícula viatja entre A i B , aquest observador podrà creure que viatja en un sistema inercial, i el temps transcorregut en aquest viatge —ell creurà que està parat i que tota la resta es mou—,

segons el seu rellotge, serà $d(P_A, P_B)/ic$. Quan canviï bruscament de direcció, notarà que passa alguna cosa estranya, que el seu sistema inercial ha deixat de ser-ho. Però després, mentre viatja de B a C , tornarà a creure que el seu sistema és inercial i el temps transcorregut entre B i C serà, segons el seu rellotge, $d(P_B, P_C)/ic$. Postulem que el temps d'un tal observador (que no és pas inercial) no sofreix cap salt en el punt B , és a dir, que el temps transcorregut en tot el viatge, segons el seu rellotge, és

$$\frac{1}{ic} (d(P_A, P_B) + d(P_B, P_C)) .$$

Suposem ara una situació una mica més complicada. Suposem que una partícula P viatja amb moviment arbitrari respecte a un sistema inercial S , descrivint, però, una corba diferenciable amb velocitat instantània $\vec{v}$ tal que $\|\vec{v}\| < c$. Un observador de S representarà el moviment de la partícula per una corba γ de $\mathbf{R}^4$ de vector tangent temporal positiu en cada punt. Siguin P_A i P_B dos punts d'aquesta corba. Ens proposem saber quin serà l'interval de temps, mesurat per un observador que viatja amb la partícula P , entre els dos esdeveniments representats per P_A i P_B . Naturalment, com que aquest observador no viatja pas en un sistema inercial, caldrà algun postulat nou per al nostre propòsit.

Prenguem $n-1$ punts sobre la corba γ , $P_1, \dots, P_{n-1}$, situats entre P_A i P_B , i considerem la trencada de $\mathbf{R}^4$ formada pels segments $\overline{P_A P_1}, \overline{P_1 P_2}, \dots, \overline{P_{n-1} P_B}$. Aquesta trencada correspondrà al moviment d'una partícula P' que viatja en una trajectòria "pròxima" a P . El significat de "pròxima" no el precisem aquí. Per a un observador que viatges amb P' , el temps entre els esdeveniments P_A i P_B seria

$$\frac{1}{ic} (d(P_A, P_1) + d(P_1, P_2) + \dots + d(P_{n-1}, P_B)) .$$

Postulem ara que a trajectòries pròximes els corresponen temps propis pròxims i que, per un pas al límit que és precisament la mateixa definició de longitud d'una corba, tenim que l'interval de temps entre els esdeveniments P_A i P_B , mesurat per un observador que viatja amb P , és

$$\frac{1}{ic} \text{longitud de } \gamma \text{ entre } P_A \text{ i } P_B .$$

Una vegada arribats a aquesta conclusió, podem refondre els diversos postulats que hem anat introduint en aquest apartat en un de sol que digui el següent: el temps entre dos esdeveniments P_A i P_B mesurat per un observador el moviment del qual vingui representat per una corba γ de l'espai de Minkowski, diferenciable a trossos, amb vector tangent temporal positiu en cada punt, és la longitud de γ entre P_A i P_B multiplicada pel factor $1/ic$.

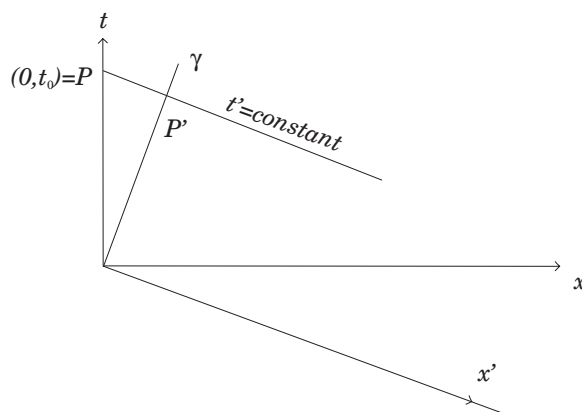


Figura 14.4

Molts consideren aquest postulat la definició de temps propi. Des d'aquest punt de vista, el postulat consistiria a creure que el temps que ells han definit és el temps que marcarà un rellotge que viatgi amb l'observador.

10 Interpretació de diversos problemes a l'espai de Minkowski

Abans ja hem dit que tots els problemes cinemàtics de la relativitat especial es tradueixen sempre en problemes de geometria a l'espai de Minkowski. Vegem-ne uns quants exemples.

Exemple (El temps passa més a poc a poc quan es corre) Siguin S i S' dos sistemes inercials tals que els eixos de les x i de les x' coincideixen i que als instants inicials coincideixen els orígens. Un observador de nom Jaume situat a l'origen de S diu “ara” a l'instant $t = 0$ del seu rellotge i torna a dir “ara” a l'instant t_0 del seu rellotge. Mesurem a S' l'interval de temps entre els esdeveniments següents:

- 1) Un observador de S' veu al seu davant en Jaume quan diu “ara” la primera vegada.
- 2) Un altre observador de S' veu al seu davant en Jaume quan diu “ara” la segona vegada.

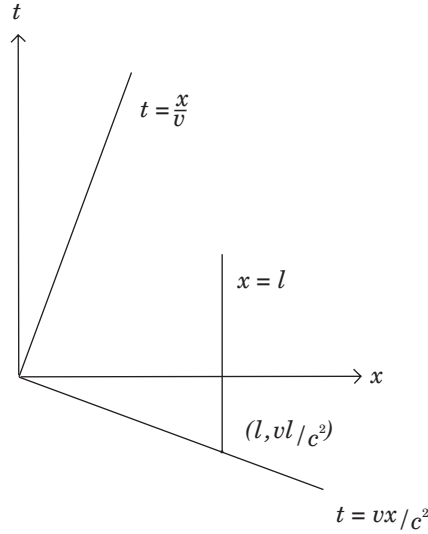


Figura 14.5

Com que es tracta d'un problema unidimensional, prescindim de les coordenades y, z . Els observadors de S representaran el moviment de l'origen de S' per la recta γ d'equació $x = vt$ (és a dir, $t = x/v$). Aquesta recta serà l'eix t' . L'eix de les x' serà perpendicular (per la mètrica de Minkowski) a l'anterior i passarà per l'origen. (A la figura 14.5 dibuixem aquestes rectes perpendiculars segons la mètrica euclidiana, si bé s'ha de tenir en compte que, en realitat, són perpendiculars segons la mètrica de Minkowski.) Com que $t = x/v$ té $(1, 1/v)$ com a vector director, la perpendicular tindrà $(1, v/c^2)$ com a vector director. Serà, doncs, $t = (v/c^2)x$. El primer esdeveniment té coordenades $(0, 0)$ en les dues referències. El segon esdeveniment vindrà donat pel punt P de coordenades $(0, t_0)$ en la primera referència. Sigui P' la intersecció de γ amb la recta $t' = \text{constant}$, que passa per P . El temps que busquem és el temps propi de γ entre $(0, 0)$ i P' . Totes les rectes $t' = \text{constant}$ són paral·leles a l'eix x' . Són, doncs, de la forma $t' = (v/c^2)x + \text{constant}$. Perquè passi per P haurà de ser que per a $x = 0$ sigui $t = t_0$. Serà, doncs, $t' = (v/c^2)x + t_0$ i P' tindrà les coordenades següents (a S):

$$\left(\frac{vt_0}{1 - v^2/c^2}, \frac{t_0}{1 - v^2/c^2} \right).$$

La norma de OP' dividida per ic serà, doncs,

$$\tau = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Així obtenim per un procediment geomètric el mateix resultat que ja havíem trobat a l'apartat 5.

Si som a S' , l'interval de temps t_0 de S (la gent de S es mou respecte a nosaltres) és més curt que el nostre interval de temps τ . El seu temps passa, doncs, més a poc a poc que el nostre.

Exemple (Les distàncies d'un objecte que es mou són més curtes quan està en repòs) Suposem, com abans, un sistema inercial S . Posem una barra rígida de longitud l sobre l'eix de les x . Suposem, com abans, que un altre sistema inercial S' es mou respecte a S amb velocitat v , i que el moviment té lloc en la direcció dels eixos x i x' dels dos sistemes. Suposem, a més, com abans, que per a $t = t' = 0$ coincideixen els orígens. Suposem que els dos extrems de la barra rígida en repòs respecte a S són $x = 0$ i $x = l$. Prescindim, com abans, de les coordenades y, z , ja que volem estudiar un problema unidimensional, només sobre l'eix de les x . Els observadors de S representaran el moviment de l'origen de S' per la recta $x = vt$ de l'espai de Minkowski, és a dir, $t = x/v$, la qual serà l'eix de les t' per als observadors de S' (figura 14.5). L'eix de les x' serà la recta perpendicular a $t = x/v$ per l'origen, o sigui $t = vx/c^2$. Els dos extrems de la barra vindran representats en tot moment per les rectes paral·leles $x = 0$, $x = l$. La recta $t = vx/c^2$ (que és l'eix de les x') s'interseccionarà amb les dues rectes $x = 0$ i $x = l$ en els punts $(0, 0)$ i $(l, vl/c^2)$. La distància d de la barra mesurada pels observadors de S' serà la distància a l'espai de Minkowski entre aquests dos punts, és a dir,

$$d = \sqrt{1 - v^2/c^2} l.$$

Per als observadors de S' , la longitud de la barra, que segons ells es mou, és més petita que la longitud l que aquesta barra tenia en el sistema S (en repòs). Aquest és el mateix resultat obtingut a l'apartat 5.

Exemple (La paradoxa dels bessons) Siguin en Pere i en Joan dos germans bessons. Suposem que en Pere està situat en un sistema inercial S i que en Joan agafa un coet i comença a viatjar amb moviment rectilini i uniforme respecte a en Pere, en la direcció de l'eix de les x de S . En un determinat moment es para sobtadament i torna endarrera amb velocitat contrària, fins a retrobar el seu germà. Veurem que quan en Joan i en Pere es retroben, en Joan és més jove que en Pere. Per tant, els dos germans han deixat de ser bessons.

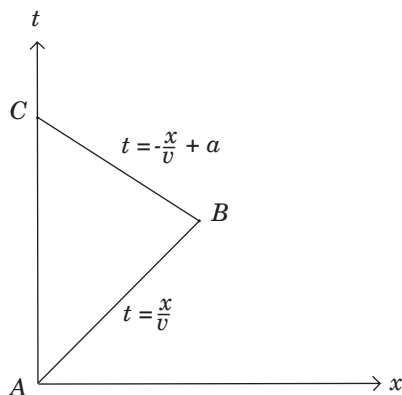


Figura 14.6

En Pere és sempre en el sistema inercial S . Representarà tots els esdeveniments a l'espai de Minkowski de coordenades (x, t) . Com que està parat a l'origen de S , la seva vida està representada per l'eix de les t . En canvi, el moviment d'en Joan serà representat per les dues rectes $t = x/v$ i $t = x/(-v) + a$, on a és l'instant de temps en què canvia el moviment. Siguin A , B i C els punts de l'espai de Minkowski que indica la figura 14.6. El temps propi d'en Joan serà

$$\frac{1}{ic} (d(A, B) + d(B, C)) ,$$

mentre que el temps propi d'en Pere és $(1/ic)d(A, C)$. En virtut de la proposició 14.21 (desigualtat triangular a l'espai de Minkowski) es té

$$\frac{1}{ic} (d(A, B) + d(B, C)) \leq \frac{1}{ic} d(A, C) .$$

Per tant, en Joan és més jove que en Pere. (Tingueu en compte que perquè a la desigualtat anterior valgui el signe igual, B ha d'estar sobre la recta AC , i no és aquest el cas.)

Capítol 15

Dinàmica de la relativitat especial

1 Impulsió i força de Minkowski

Abans d'abordar la dinàmica de la relativitat especial, fem un breu resum de la dinàmica clàssica d'una sola partícula que hem exposat al capítol 7. Recordem que a cada partícula material se li assignava, per un procediment físic, un nombre real positiu m que anomenàvem massa de la partícula. Si la partícula es movia, anomenàvem quantitat de moviment (en cada instant de temps) el vector $\vec{P} = m\vec{v}$, on $\vec{v}$ era la velocitat de la partícula i m la seva massa. Dèiem, també, que quan una partícula es movia estava subjecta a la força

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Les forces es manifestaven, doncs, produint acceleracions a les partícules. Més endavant (capítol 9) hem donat les lleis que regulaven el xoc de partícules. Dèiem que quan dues partícules xoquen la quantitat de moviment del sistema (suma de les quantitats de moviment de cada partícula) roman constant abans i després del xoc. En altres capítols hem donat lleis que afirmen l'existència de forces i en donen l'expressió. Per exemple, la llei de gravitació universal (capítol 11) o la llei de Lorentz que tracta de la força a què està sotmesa una partícula de càrrega elèctrica q situada en un camp electromagnètic (capítol 13).

Ara ens proposem revisar tots aquests conceptes i lleis des del punt de vista de la relativitat. La llei de gravitació és la més difícil de formular en el marc de la relativitat. Einstein va trigar molts anys a incorporar-la a la seva teoria i, per fer-ho, va haver de crear el que ell va anomenar relativitat general. La resta de la dinàmica que no contempla la gravitació forma part d'allò que es coneix com a relativitat especial. És d'això últim que ens volem ocupar ara.

Recordem que al capítol anterior hem postulat l'existència d'una classe privilegiada de sistemes de referència, que hem anomenat inercials, amb la propietat que els observadors que viatgen en qualsevol d'aquests sistemes poden formular les lleis físiques d'identica manera. Tractem ara de copiar tot allò que puguem de la dinàmica clàssica, canviant només el que sigui incompatible amb el principi anterior o amb el d'invariància de la velocitat de la llum.

Podríem començar igual que hem començat la dinàmica clàssica: a tota partícula material se li assigna, per un procediment físic, un nombre real positiu m que anomenarem massa de la partícula. Per a aquells lectors que hagin sentit parlar ja de relativitat i algú els hagi dit que la massa d'un cos canvia amb la velocitat, afanyem-nos a precisar que la massa m de què parlem aquí és la massa en repòs. Si al lector no li interessa especialment que se li detalli quin procediment físic es fa servir per assignar a cada cos la seva massa m , pot ignorar els dos paràgrafs que vénen a continuació.

Parlem, doncs, del procediment físic utilitzat per a assignar a cada cos material la seva massa. Al capítol 7 vèiem que per fer això només calia tenir un criteri físic que ens permetés decidir, entre dos cossos donats, quin té una massa més gran. Basant-nos en aquell resultat, basta que expliquem quin criteri farem servir, en el marc de la relativitat especial, per decidir, entre dos cossos donats, a quin se li ha d'assignar una massa més gran. Donem, de moment, el *criteri provisional* següent: ens emportem els dos cossos que volem comparar a un sistema inercial. Els llancem l'un contra l'altre de manera que els dos es moguin sobre una mateixa recta amb velocitats (respecte al sistema inercial on som) d'igual mòdul però de sentit contrari. Observem el moviment dels dos cossos després del xoc i comparem la seva velocitat després del xoc amb la que tenien abans del xoc. El cos que hagi experimentat una variació més gran de velocitat és (segons el criteri que estem definint) el cos al qual se li ha d'assignar una massa més petita. Postulem que el resultat d'aquest experiment no depèn del sistema inercial on el realitzem. Perquè aquest criteri que acabem d'enunciar no sigui contradictori amb la teoria que desenvoluparem a continuació, hauríem de prendre, però, precaucions suplementàries. Hauríem d'exigir, pel cap baix, que el xoc de partícules en què es basa la comparació de masses fos *elàstic*. ¿Per què no hem pres precaucions d'aquesta mena quan hem enunciat un criteri semblant en el marc de la mecànica clàssica (capítol 7)? Doncs perquè en mecànica clàssica la quantitat de moviment es conserva en tota mena de xocs, elàstics o inelàstics. En canvi, aquí no es conservarà, en general, ni en els primers ni en els segons (es conservarà una altra quantitat de moviment més general, la de Minkowski). Observem, però, que el xoc en l'experiment que hem proposat no és "qualsevol", sinó molt simètric. Hauríem de tenir, almenys, la precaució que el xoc fos *elàstic* perquè veurem més endavant que en els xocs

inelàstics l'energia cinètica es pot invertir a augmentar la massa.

I què voldria dir, aquí, que el xoc fos “elàstic”? Si haguéssim de respondre a aquesta pregunta ara mateix, utilitzant només els conceptes que hem definit fins ara, ens hauríem d'accontentar amb unes quantes vaguetats: “Doncs, ..., doncs que,, doncs que rebotin com boles de billar, que, que no s'observi desprendiment de calor en el moment del xoc”. Una dificultat encara més important que el fet de no saber definir amb precisió què entenem per xoc “elàstic” seria la següent: el fet que dos cossos xoquin de manera elàstica o no, sol dependre de la naturalesa dels cossos. Dificilment nosaltres podrem intervenir per “fer-los xocar elàsticament”. Així doncs, el *criteri provisional* que hem intentat definir per comparar la massa de dos cossos “qualssevol” pot presentar dificultats. Observem atentament, però, el teorema del capítol 7 que ens dóna (en la seva demostració) el procediment per a assignar a cada cos la seva massa a partir d'un criteri de comparació. En aquell procediment hem de partir d'un cos U que és la unitat de mesura, i de cossos $U_1, U_2, U_3, \dots$ de masses respectives $1/2, 1/2^2, 1/2^3, \dots$. Hem de disposar de diversos exemplars dels cossos $U, U_1, U_2, \dots$ que anomenarem, des d'ara, *patrons*. Per mesurar la massa d'un cos qualsevol K , hem de comparar el cos K amb els cossos patrons pel criteri de comparació que utilitzem. Ens adonem, doncs, que no cal saber comparar dos cossos *qualssevol*, sinó que basta saber comparar un cos qualsevol amb els patrons. Postularem, doncs, que tenim diversos exemplars d'una família de *patrons* $U, U_1, U_2, \dots$ tals que *sempre* que apliquem el *criteri provisional* anterior de comparació entre un cos qualsevol i un exemplar qualsevol d'un mateix *patró* U_i , obtenim sempre el mateix resultat. Aquest postulat vol dir intuïtivament que quan fem xocar un cos qualsevol K amb un exemplar qualsevol d'un *patró*, el xoc és de naturalesa tal que la “massa” de K no s'augmenta o disminueix en el xoc, perquè si això ocorregués, en repetir de nou l'experiment amb aquell mateix patró i amb altres exemplars diferents del mateix patró, no trobaríem pas el mateix resultat. Amb aquest postulat descartem, doncs, els xocs “dolents” entre un cos qualsevol i un *patró*.

Una vegada hem assignat a cada partícula la seva massa, se'ns podria acudir de definir la quantitat de moviment $\vec{P}$ relativa a un sistema inercial, igual que en mecànica clàssica, com el vector $\vec{P} = m\vec{v}$, on $\vec{v}$ és la velocitat de la partícula relativa al sistema inercial. I se'ns podria ocórrer postular, com en mecànica clàssica, que la quantitat de moviment del sistema roman constant abans i després del xoc.

Voldríem fer palès, ara, que el plantejament anterior és del tot il·lícit en relativitat perquè contradiria els principis cinemàtics que hem acceptat al capítol anterior. Per veure-ho, situem-nos en un sistema inercial i imaginem, per exemple, dues partícules materials de masses respectives m i $2m$, i velocitats

respectives $\vec{u}$ i $-\vec{u}$, oposades, que xoquen frontalment. Si ens situem en la recta que uneix les dues partícules, com que el moviment és unidimensional, podem substituir els vectors per escalars i escriure u i $-u$. En el xoc elàstic clàssic les partícules surten, després del xoc, amb velocitats respectives $-5u/3$ i $u/3$. Observem que la quantitat de moviment abans del xoc és

$$\mathcal{P} = mu - 2mu = -mu ,$$

i la quantitat de moviment després del xoc és

$$\mathcal{P} = \frac{-5mu}{3} + \frac{2mu}{3} = -mu .$$

Observem ara el mateix fenomen des d'un altre sistema inercial que viatja respecte al primer amb velocitat constant de manera que el moviment té lloc sobre l'eix de les x del primer i de les x' del segon. Continuem substituint els vectors per escalars, i designem per v la velocitat d'aquest segon sistema, S' , respecte al primer sistema S que teníem. Apliquem les fórmules de transformació de velocitats obtingudes al capítol anterior. Una partícula que viatja amb velocitat u respecte a S tindrà velocitat u' respecte a S' donada per

$$u' = \frac{1}{1 - \frac{uv}{c^2}}(u - v) .$$

La quantitat de moviment del sistema abans del xoc, mesurada des del segon sistema seria

$$\frac{m}{1 - \frac{uv}{c^2}}(u - v) + \frac{2m}{1 + \frac{uv}{c^2}}(-u - v) ,$$

mentre que la quantitat de moviment després del xoc seria

$$\frac{m}{1 + \frac{5uv}{3c^2}}\left(-\frac{5}{3}u - v\right) + \frac{2m}{1 - \frac{uv}{3c^2}}\left(\frac{u}{3} - v\right) ,$$

que no coincideix pas amb l'anterior llevat del cas $v = 0$.

O sigui, que si bé en un sistema inercial la quantitat de moviment (clàssica) roman constant abans i després del xoc, en un altre això pot deixar de complir-se. Això fa que no puguem acceptar una llei física que es basi en la conservació de la quantitat de moviment abans i després del xoc, ja que en virtut del principi de relativitat que hem acceptat al capítol anterior les lleis físiques han de poder ser formulades d'identica manera des de qualsevol sistema inercial.

Com que una còpia pura i simple de la dinàmica clàssica no és compatible, doncs, amb els principis acceptats al capítol anterior, tractarem de fer-ne una còpia intel·ligent, tot conservant-ne l'esperit.

Recordem que el moviment de qualsevol partícula dóna lloc a una corba de l'espai de Minkowski de vector tangent temporal, la qual es pot parametritzar pel temps propi τ de la partícula (que és un paràmetre intrínsec que no depèn de cap sistema inercial). Sigui, doncs, $\vec{\gamma}(\tau)$ la corba a l'espai de Minkowski corresponent al moviment d'una partícula material. Anomenarem velocitat de Minkowski de la partícula el vector $d\vec{\gamma}(\tau)/d\tau$, i acceleració de Minkowski el vector $d^2\vec{\gamma}(\tau)/d\tau^2$. Aquests vectors pertanyen a un espai de quatre dimensions, a diferència de les velocitats i acceleracions clàssiques que són conceptes tridimensionals. Si una partícula de massa m es mou i el seu moviment correspon a una corba $\vec{\gamma}(\tau)$ de l'espai de Minkowski, anomenarem impulsio de Minkowski (o, també, quantitat de moviment de Minkowski) corresponent a un instant τ del temps propi de la partícula el vector $\vec{P} = md\vec{\gamma}/d\tau$. Anomenarem força de Minkowski el vector $d\vec{P}/d\tau = md^2\vec{\gamma}(\tau)/d\tau^2$. *Postulem que quan dues partícules xoquen la impulsio (de Minkowski) del sistema (suma de les impulsions de les dues partícules) roman constant abans i després del xoc.* Observem que la corba $\vec{\gamma}(\tau)$ de l'espai de Minkowski associada al moviment d'una partícula (corba que representa la vida de la partícula) és un concepte geomètric que no depèn de cap sistema de referència. En efecte, tal com explicàvem a l'apartat 8 del capítol anterior, els esdeveniments són punts de l'espai de Minkowski i els diversos sistemes inercials donen lloc a diverses referències d'aquest espai, per la qual cosa les coordenades d'aquests punts sí que varien en canviar de sistema inercial, si bé el punt sempre és el mateix. Així doncs, la vida de qualsevol partícula ve representada per una corba de l'espai de Minkowski que és independent de qualsevol sistema inercial, encara que la representació en coordenades que se'n fa sí que depèn del sistema inercial elegit. El temps propi τ , que és una espècie de paràmetre arc, també és un concepte geomètric independent de qualsevol referència. El vector tangent $d\vec{\gamma}/d\tau$ no dependrà, per tant, de cap sistema inercial. Això mostra que la llei que acabem de formular no depèn de cap sistema inercial, tal com exigeix el principi de relativitat del capítol anterior.

¿Quina relació hi ha entre les velocitats de Minkowski i les usuales? ¿I quina relació hi ha entre la impulsio de Minkowski i la quantitat de moviment usual? Vegem-ho. Situem-nos en un sistema inercial. El moviment d'una partícula respecte a aquest sistema vindrà donat per la corba de $\mathbf{R}^4$ donada

paramètricament per

$$\begin{cases} x^1 = \gamma^1(t) \\ x^2 = \gamma^2(t) \\ x^3 = \gamma^3(t) \\ x^4 = t, \end{cases}$$

on $(\gamma^1(t), \gamma^2(t), \gamma^3(t))$ són les tres coordenades de la partícula a l'instant t del rellotge del sistema inercial (recordem que al capítol anterior un sistema de referència significava l'elecció de tres eixos perpendiculars a l'espai ordinari i un rellotge per a mesurar el temps). El temps t del sistema inercial es podrà expressar en funció del temps propi τ de la partícula. La mateixa corba anterior parametritzada per τ , serà

$$\begin{cases} x^1 = \gamma^1(\tau) \\ x^2 = \gamma^2(\tau) \\ x^3 = \gamma^3(\tau) \\ x^4 = t(\tau). \end{cases}$$

La velocitat de Minkowski serà, doncs,

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} = \left(\frac{d\gamma^1}{d\tau}, \frac{d\gamma^2}{d\tau}, \frac{d\gamma^3}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau} \right) = \left(\frac{d\gamma^1}{dt}, \frac{d\gamma^2}{dt}, \frac{d\gamma^3}{dt}, 1 \right) \frac{dt}{d\tau} \\ &= (v^1, v^2, v^3, 1) \frac{dt}{d\tau}, \end{aligned}$$

on $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$ és la velocitat usual de la partícula respecte al sistema inercial. Per la definició de temps propi (capítol anterior), tindrem

$$\tau(t) = \frac{1}{ic} \int_0^t \sqrt{g\left(\frac{d\vec{\gamma}}{d\xi}, \frac{d\vec{\gamma}}{d\xi}\right)} d\xi,$$

d'on

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= \frac{1}{ic} \sqrt{g\left(\frac{d\vec{\gamma}}{dt}, \frac{d\vec{\gamma}}{dt}\right)} \\ &= \frac{1}{ic} \sqrt{g((v^1, v^2, v^3, 1), (v^1, v^2, v^3, 1))} \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - v^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \end{aligned}$$

on $v = \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2} = \|\vec{v}\|$. Per tant,

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (v^1, v^2, v^3, 1).$$

La impulsió de Minkowski de la partícula serà

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(v^1, v^2, v^3, 1),$$

on m és la massa de la partícula. Les tres primeres components d'aquest vector donen lloc al vector tridimensional

$$\vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\vec{v},$$

que depèn, òbviament, del sistema inercial i que coincideix aproximadament amb el vector clàssic de quantitat de moviment, $m\vec{v}$, per a velocitats petites. El vector $\vec{p}$ coincideix exactament amb la quantitat de moviment clàssica que tindria una partícula de massa

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Estudiem ara la quarta component del vector $\vec{\mathcal{P}}$, que és justament M . Desenvolupant per Taylor la funció $1/\sqrt{1-x^2}$ a l'origen, tenim

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Veiem, doncs, que una primera aproximació de la quarta component de $\vec{\mathcal{P}}$ és

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cong m + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right),$$

o sigui, la massa augmentada amb l'energia cinètica tradicional, dividida per c^2 .

2 Equivalència de massa i energia

Estudiem, en primer lloc, el xoc de dues partícules de la mateixa massa m que es mouen amb velocitats iguals i oposades respecte a un sistema inercial. Elegim els eixos del sistema inercial de manera que el moviment de les dues partícules tingui lloc sobre l'eix de les x . Suposem que les partícules tenen respectivament velocitats v i $-v$ abans del xoc. La impulsió de Minkowski

abans del xoc serà

$$\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, 0, 0, \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) + \left(-\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, 0, 0, \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \\ = \left(0, 0, 0, \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right).$$

Si anomenem v'_1 i v'_2 les velocitats després del xoc, la impulsio després del xoc serà

$$\left(\frac{mv'_1}{\sqrt{1-v'^2_1/c^2}}, 0, 0, \frac{m}{\sqrt{1-v'^2_1/c^2}} \right) + \left(\frac{mv'_2}{\sqrt{1-v'^2_2/c^2}}, 0, 0, \frac{m}{\sqrt{1-v'^2_2/c^2}} \right).$$

Igualant, obtenim

$$\begin{cases} \frac{mv'_1}{\sqrt{1-v'^2_1/c^2}} + \frac{mv'_2}{\sqrt{1-v'^2_2/c^2}} = 0 \\ \frac{m}{\sqrt{1-v'^2_1/c^2}} + \frac{m}{\sqrt{1-v'^2_2/c^2}} = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{cases}$$

Aquest sistema, on v'_1 i v'_2 són incògnites, té per solucions $v'_2 = -v'_1 = \pm v$. No costa gaire de veure que aquestes són les úniques solucions. Un examen físic de la solució $v'_2 = -v'_1 = -v$ ens fa desestimar-la, perquè suposaria que les dues partícules es travessen mútuament. L'única solució que ens queda és $v'_2 = -v'_1 = v$, que és la mateixa solució que corresponia al xoc elàstic en mecànica clàssica.

¿I el xoc inelàstic? ¿És que el xoc inelàstic no té cabuda dins la teoria de la relativitat? Aparentment sembla que no, ja que la solució que consisteix en el fet que les dues partícules romanguin juntes després del xoc amb velocitats nul·les no apareix pas en el plantejament anterior. Per tant, en el raonament anterior alguna cosa hem fet malament o bé hem utilitzat implícitament alguna hipòtesi addicional no justificada convenientment.

Si s'aconseguís que les dues partícules romanguessin juntes després del xoc amb velocitats nul·les, la impulsio de Minkowski després del xoc seria $(0, 0, 0, m')$, on m' és la suma de masses de les dues partícules. Com que la impulsio abans del xoc era

$$\left(0, 0, 0, \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right),$$

perquè es conservés la impulsió hauria de succeir que

$$m' = \frac{2m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Dit d'una altra manera, hauríem d'admetre que la massa després del xoc és superior a la massa $2m$ del sistema abans del xoc (en el planteig que hem fet abans hem suposat implícitament, sense justificació convenient, que la massa es conservava abans i després del xoc). La diferència de masses del sistema abans i després del xoc seria justament

$$m' - 2m = 2m \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \cong 2m \frac{v^2}{2c^2} = \frac{1}{c^2}(mv^2).$$

Així doncs, $m' - 2m$ és aproximadament igual a l'energia cinètica clàssica de les dues partícules abans del xoc, dividida per c^2 . Hauríem d'admetre, per tant, que l'energia cinètica s'inverteix a augmentar la massa del sistema.

Si les dues partícules romanen juntes després del xoc, o bé s'augmenta la massa del sistema en una quantitat aproximada a l'energia cinètica clàssica, o bé aquesta energia es transforma en calor. En qualsevol cas hem d'admetre que tota forma d'energia (cinètica, calorífica, etc.) equival a massa multiplicada per c^2 . Si no admetéssim això, hauríem de renunciar al principi de conservació de la impulsió de Minkowski en tota mena de xocs.

Així doncs, des d'ara anomenarem *energia en repòs* d'una partícula o d'un sistema de massa m la quantitat $E = mc^2$. Anomenarem *energia* d'una partícula o d'un sistema de massa m respecte a un sistema inercial la quantitat

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \dots}_T$$

O sigui, l'energia d'una partícula és igual a l'energia en repòs més un terme T que coincideix molt aproximadament amb l'energia cinètica clàssica per a velocitats petites. A més, quan $v = 0$ l'energia coincideix amb l'energia en repòs. Segons aquestes definicions, l'energia (que és un concepte que depèn del sistema inercial on és mesurada) és la quarta component del vector impulsio de Minkowski multiplicada per c^2 , quan s'expressa aquest vector impulsio en la referència de l'espai de Minkowski a què dona lloc el sistema inercial on es mesura aquesta energia.

Resumint, el vector impulsio de Minkowski $\vec{\mathcal{P}}$ és un vector intrínsec de l'espai de Minkowski. Ara bé, elegit un determinat sistema inercial (que equival

a l'elecció d'una referència orto- c -normal de l'espai de Minkowski), les tres primeres components de $\vec{\mathcal{P}}$ respecte a aquesta referència constitueixen el vector tridimensional

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,$$

que s'anomena impulsíó respecte al sistema inercial. La quarta component de $\vec{\mathcal{P}}$ és l'escalar

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,$$

que és E/c^2 , on E és l'energia, concepte que depèn, doncs, del sistema inercial. En tota mena de xocs es conserva la suma d'impulsions de Minkowski de les dues partícules abans i després del xoc. Un xoc es diu *elàstic* quan, a més, es conserva la suma de masses de les dues partícules abans i després del xoc.

3 Les quatre components del vector força de Minkowski

Recordem que hem anomenat força de Minkowski corresponent a una partícula de massa m el vector $\vec{F} = d\vec{\mathcal{P}}/d\tau$, on $\vec{\mathcal{P}}$ és la impulsíó de Minkowski i τ el temps propi. Fixem un sistema inercial, el qual donarà lloc a una referència orto- c -normal de l'espai de Minkowski. Respecte a aquesta referència, $\vec{\mathcal{P}}$ té quatre components,

$$\vec{\mathcal{P}} = (p^1, p^2, p^3, E/c^2) .$$

El vector força de Minkowski $\vec{F}$ tindrà, també, quatre components,

$$\vec{F} = (F^1, F^2, F^3, F^4) .$$

Les tres primeres components donaran lloc a un vector tridimensional que designarem per $\vec{f}$:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

Ara bé,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{m d\vec{v}/dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m\vec{v}}{c^2} (1 - v^2/c^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{dv}{dt} .$$

Per a velocitats petites i acceleracions no massa grans, els termes v^2/c^2 i $(\vec{v}/c^2)(dv/dt)$ són menyspreables. Llavors el vector $\vec{f}$ coincideix molt aproximadament amb la força de Newton $m d\vec{v}/dt$.

Estudiem ara la quarta component, F^4 , del vector $\vec{F}$. Tenim

$$F^4 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{E}{c^2} \right).$$

F^4 és, doncs, la variació d'energia respecte al temps propi, dividida per c^2 . Si volem obtenir una altra expressió de F^4 , procedim de la manera següent. Observem en primer lloc que $\vec{F}$ i el vector velocitat de Minkowski $\vec{u}$ són perpendiculars. En efecte, si $\vec{\gamma}(t)$ és la corba a l'espai de Minkowski que correspon a la vida de la partícula, tindrem

$$\frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} = \frac{d\vec{\gamma}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d\vec{\gamma}}{dt} \frac{ic}{\sqrt{g(d\vec{\gamma}/dt, d\vec{\gamma}/dt)}}.$$

Per tant,

$$g(d\vec{\gamma}/d\tau, d\vec{\gamma}/d\tau) = -\frac{c^2}{g(d\vec{\gamma}/dt, d\vec{\gamma}/dt)} g(d\vec{\gamma}/dt, d\vec{\gamma}/dt) = -c^2.$$

Derivant ara respecte a τ , tindrem

$$2g\left(\frac{d^2\vec{\gamma}}{d\tau^2}, \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}\right) = 0.$$

Com que $d\vec{\gamma}/d\tau = \vec{u}$, multiplicant per m tindrem

$$g(\vec{F}, \vec{u}) = 0.$$

El vector $\vec{u}$ té com a components

$$\vec{u} = (v^1, v^2, v^3, 1) \frac{dt}{d\tau},$$

on $v^i = d\gamma^i/dt$. Per tant,

$$\begin{aligned} 0 &= g(\vec{F}, \vec{u}) = F^1 u^1 + F^2 u^2 + F^3 u^3 - c^2 F^4 u^4 \\ &= \vec{f} \cdot \vec{v} \frac{dt}{d\tau} - c^2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{E}{c^2} \right) \frac{dt}{d\tau}. \end{aligned}$$

D'on

$$\frac{dE}{d\tau} = \vec{f} \cdot \vec{v}.$$

Per tant,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

El segon membre d'aquesta expressió coincideix, per a velocitats petites, amb la potència clàssica. Anomenem, doncs, potència relativista de la partícula respecte al sistema inercial escollit la quantitat

$$W = \vec{f} \cdot \vec{v} \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

L'expressió anterior ens diu, igual que en mecànica clàssica, que la variació d'energia és la potència. Llavors F^4 es pot interpretar així:

$$F^4 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{E}{c^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} W.$$

Capítol 16

Dinàmica relativista de fluids: el tensor d'impulsió-energia

1 Densitat de massa-energia

Suposem un fluid en moviment respecte a un sistema inercial S determinat. En el capítol corresponent a la mecànica de fluids clàssica suposàvem que existia una funció $\rho(x, t)$ (funció de $x = (x^1, x^2, x^3)$ i del temps t) que complia

$$m(V, t) = \int_V \rho(x, t) dx ,$$

on V era una regió mesurable de l'espai i $m(V, t)$ era la massa del fluid contingut a la regió V a l'instant t . dx era l'element de volum, $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, de $\mathbf{R}^3$. Aquesta funció $\rho(x, t)$, que suposàvem diferenciable, l'anomenàvem densitat. Si x_0 era un punt qualsevol de l'espai, t_0 un instant de temps i V_δ era la bola de centre x_0 i radi δ , vèiem que es complia

$$\rho(x_0, t_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(V_\delta, t_0)}{\text{vol}(V_\delta)} ,$$

la qual cosa donava una interpretació física de la densitat. Ara, en relativitat, hem identificat els conceptes de massa i energia. Fixat un sistema inercial S , suposem que existeix una funció diferenciable $\rho(x, t)$ que per a cada regió mesurable V de l'espai ordinari $\mathbf{R}^3$, compleix

$$m(V, t) = \int_V \rho(x, t) dx ,$$

on $m(V, t)$ indica la massa-energia del fluid contingut a la regió V a l'instant t . Com que el concepte de massa-energia depèn del sistema inercial escollit, $\rho(x, t)$ en depèn també.

Sigui P una partícula qualsevol que es mou amb el fluid. En un instant qualsevol del seu temps propi considerem un sistema inercial S' tal que a l'instant $t' = 0$ el seu origen coincideixi amb la partícula P i tal que la velocitat de P respecte a S' sigui nul·la en aquell instant. El sistema inercial S' s'anomenarà sistema propi de P a l'instant τ , i queda determinat llevat de canvis ortogonals d'eixos a l'espai. Mesurant la densitat de massa-energia del fluid des de S' , a l'origen de S' i a l'instant $t' = 0$, obtindrem un nombre σ que s'anomena densitat pròpia del fluid, a la partícula P i a l'instant τ_0 del seu temps propi. Aquesta densitat pròpia només depèn de la partícula P i del seu temps propi.

Si σ és la densitat pròpia del fluid a la partícula P en un instant $\tau = 0$ del seu temps propi i ρ és la densitat de massa-energia del fluid a la mateixa partícula i al mateix instant, mesurada des d'un sistema inercial S , es compleix $\sigma = (1 - v^2/c^2)\rho$, on v és el mòdul de la velocitat de P respecte al sistema inercial S en aquell instant. En efecte, el sistema inercial propi de P en aquell instant, S' , es mou respecte a S amb velocitat de mòdul v . Com que les longituds es contreuen en la direcció del moviment pel factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ i com que la massa-energia augmenta pel factor $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, la densitat de massa-energia, que és un quocient de massa-energia entre volum, augmentarà segons el factor $1/(1 - v^2/c^2)$ en passar de S' a S . Per tant, $\rho = (1/(1 - v^2/c^2))\sigma$.

2 Vector densitat de força exterior

En el capítol de mecànica clàssica de fluids consideràvem que la força exterior que actua sobre el fluid ve donada en cada punt x i cada instant de temps t per un vector $\vec{f}(x, t)$ que anomenàvem densitat de força exterior, de manera que la força exterior total que actua sobre un cert domini V de l'espai a l'instant t vingui donada per

$$\vec{F}(V, t) = \int_V \vec{f}(x, t) dx.$$

Suposàvem, a més, que $\vec{f}(x, t)$ depèn diferenciàblement de x i t . $\vec{f}(x, t)$ es podia interpretar de la manera següent:

$$\vec{f}(x, t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(V_\lambda, t)}{\text{vol } V_\lambda},$$

on V_λ és la bola de centre x i radi λ .

Ara volem definir un concepte anàleg en relativitat. Suposem un fluid en moviment. Sigui S un sistema inercial qualsevol al qual referim el moviment i respecte al qual cada esdeveniment és representat per un punt (x, t) de $\mathbf{R}^4$.

Donat un punt (x_0, t_0) , considerem la partícula P del fluid que a l'instant t_0 es troba en el punt x_0 . Sigui S' un sistema inercial tal que a l'instant $t' = 0$ el seu origen coincideix amb la partícula P i que la velocitat de P respecte a S' és nul·la en aquell instant (sistema propi de la partícula P en aquell instant). Sigui $\vec{f}$ la densitat de força exterior a l'origen de S' a l'instant $t' = 0$, mesurada pels observadors de S' . O sigui,

$$\vec{f} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(V_\lambda)}{\text{vol } V_\lambda}, \quad (16.1)$$

on $\vec{F}(V_\lambda)$ és la força exterior (de Newton) que actua sobre la bola V_λ de centre l'origen i radi λ (bola usual de l'espai de 3 dimensions en el sistema inercial S'). El sistema inercial S' dóna lloc a una referència de l'espai de Minkowski d'origen (x_0, t_0) . Sigui H' l'hiperplà ortogonal a l'eix t' (per la mètrica de Minkowski) que passa per (x_0, t_0) . El vector $\vec{f}$ definit per (16.1), com que és un vector de l'espai dels observadors de S' , donarà lloc a un vector de $\mathbf{R}^4$ contingut a H' , vector que continuarem designant per $\vec{f}$. Aquest últim $\vec{f}$ serà el vector de l'espai de Minkowski que en les coordenades (x'^1, x'^2, x'^3, t') té com a components $(f^1, f^2, f^3, 0)$, on f^1, f^2, f^3 són les components de la força $\vec{f}$ donada per (16.1), en la referència S' .

Així doncs, per a cada (x_0, t_0) tenim un vector $\vec{f}(x_0, t_0)$ de l'espai de Minkowski que anomenarem vector densitat de força exterior de Minkowski. Suposarem també, com fèiem en mecànica clàssica, que $\vec{f}(x, t)$ depèn diferenciablement de x i t .

Pot sorprendre que anomenem força de Minkowski un vector construït a partir de la força de Newton usual. Per justificar això basta adonar-se que si γ és una partícula material de massa m (en repòs) i $\vec{F}$ és la força de Minkowski que actua sobre ella en un instant donat ($\vec{F} = md^2\vec{\gamma}/d\tau^2$), les components de F en la referència de l'espai de Minkowski corresponent a un sistema inercial S' respecte al qual la partícula està en repòs en aquell instant són $(F^1, F^2, F^3, 0)$, on F^1, F^2 i F^3 són exactament les components de la força de Newton que actua sobre ella en aquell instant (vegeu les fórmules de l'apartat 3 del capítol anterior).

3 Tensor de tensions o pressions

En mecànica clàssica de fluids consideràvem el tensor de tensions o pressions $\mathcal{T}_{(x,t)}$, tensor una vegada covariant i una vegada contravariant, amb la significació següent: la força que la resta del fluid exerceix a l'instant t sobre el

fluid contingut en un domini V , ve donada per $\int_{\partial V} \mathcal{T}_{(x,t)}(\vec{n}) ds$, on $\vec{n}$ és el camp normal exterior a ∂V , unitari, i ds és l'element d'àrea de ∂V .

Ara volem definir un concepte anàleg en relativitat. Suposem com abans, un fluid en moviment. Sigui S un sistema inercial qualsevol al qual referim el moviment i respecte al qual cada esdeveniment és representat per un punt (x, t) de $\mathbf{R}^4$. Donat (x_0, t_0) , considerem la partícula P del fluid tal que a l'instant t_0 es troba en el punt x_0 . Considerem, com abans, un sistema inercial S' que a l'instant $t' = 0$ el seu origen coincideixi amb la partícula P i que la velocitat de P respecte a S' en aquell instant sigui nul·la (sistema propi de la partícula en aquell instant). Sigui $\mathcal{T}$ el tensor clàssic de tensions o pressions del fluid a l'instant $t' = 0$ segons els observadors de S' . Sigui $\mathcal{T}_{(x_0, t_0)}$ aquest tensor a l'origen de S' . $\mathcal{T}_{(x_0, t_0)}$ és una transformació lineal. El sistema inercial S' dona lloc a una referència de l'espai de Minkowski d'origen (x_0, t_0) . Sigui H' l'hiperplà ortogonal a l'eix t' (per la mètrica de Minkowski) que passa per (x_0, t_0) . H' serà l'espai de la referència S' a l'instant $t' = 0$. Llavors $\mathcal{T}_{(x_0, t_0)}$ es pot interpretar com una transformació lineal de H' . Estenem ara aquesta transformació lineal a una transformació lineal de tot $\mathbf{R}^4$, que continuarem designant per $\mathcal{T}_{(x_0, t_0)}$, imposant que els vectors ortogonals a H' s'apliquin en 0. D'aquesta manera tenim un tensor $\mathcal{T}_{(x,t)}$ una vegada contravariant i una vegada covariant per a cada $(x, t) \in \mathbf{R}^4$, que només depèn del fluid, ja que el sistema S' que hem utilitzat per a la definició de $\mathcal{T}_{(x,t)}$ queda unívocament determinat pel fluid en cada punt i en cada instant, llevat de girs entorn de l'eix del temps. Aquest tensor així definit s'anomena tensor de tensions o pressions. Suposarem, com fèiem en mecànica clàssica, que depèn diferenciablement de (x, t) .

4 Equacions del moviment d'un fluid

Recordem les equacions del moviment d'un fluid que teníem en mecànica clàssica:

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} - \mathcal{T}) = \vec{f}, \quad (16.2)$$

on ρ era la densitat, $\vec{f}$ el vector densitat de força exterior, $\vec{v}$ el camp de velocitats de les partícules del fluid, $\mathcal{T}$ el tensor de tensions o pressions considerat com a tensor dues vegades contravariant. A més de l'equació (16.2) teníem l'equació de continuïtat

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (16.3)$$

Aquestes equacions depenen del sistema inercial escollit i no poden ser acceptades en relativitat. Seguint la filosofia del capítol anterior, fent els mínims canvis possibles en aquestes equacions clàssiques, hauríem de trobar-ne una formulació intrínseca, una formulació que no depengui de l'elecció de cap sistema inercial. Considerem a l'espai de Minkowski l'equació

$$\operatorname{div}(\sigma \vec{u} \otimes \vec{u} - \mathcal{T}) = \vec{f}, \quad (16.4)$$

on σ és la densitat pròpia, $\vec{u}$ el camp de velocitats de les partícules a l'espai de Minkowski ($\vec{u} = d\vec{\gamma}/d\tau$, on τ és el temps propi i γ la corba que representa la vida de cada partícula), $\mathcal{T}$ és el tensor de tensions introduït a l'apartat 3, considerat com a tensor dues vegades contravariant per mitjà de la mètrica de Minkowski, i f és el camp densitat de força exterior de Minkowski introduït a l'apartat 2. L'equació (16.4) és intrínseca, però ¿quina relació té amb les equacions clàssiques (16.2) i (16.3)? Sigui S el sistema inercial on ens trobem. Suposem que el fluid es mou amb velocitats petites respecte a S . En cada punt del fluid i en cada instant de temps hi haurà un sistema inercial S' propi, respecte al qual la partícula del fluid és a l'origen de S' i té velocitat nul·la respecte a S' en aquell instant. Aquests sistemes S' són els que hem fet servir per definir els conceptes de densitat pròpia, densitat de força exterior de Minkowski i tensor de tensions propi, que són els conceptes que figuren a l'equació (16.4). Ara bé, per a velocitats petites tots els diferents sistemes S' pràcticament no es mouran respecte a S i, per tant, podríem considerar que tots coincideixen amb S . Per tant, la densitat pròpia σ coincidirà gairebé amb la densitat ρ mesurada a S . El sistema S originarà, com sempre, una referència a l'espai de Minkowski. Utilitzant components respecte a aquesta referència, l'equació (16.4) s'escriurà

$$\sum \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\rho u^j u^\alpha - \mathcal{T}^{j\alpha}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho u^j u^4 - \mathcal{T}^{j4}) = f^j, \quad (16.5)$$

on els índexs grecs varien d'1 a 3 i els llatins d'1 a 4. Ara bé, tal com hem definit el tensor $\mathcal{T}$ a l'apartat 3 i tenint en compte que tots els sistemes propis S' coincideixen aquí amb S , $\mathcal{T}^{j4} = 0$. D'altra banda, per a velocitats petites $u^4 = 1$. Queda clar, doncs, que les tres primeres components de (16.5) donen (16.2) i que la quarta dóna (16.3). Per tant, l'equació (16.4), que és intrínseca, dóna les equacions clàssiques per a velocitats petites. Així doncs, aquesta és l'equació que buscàvem per substituir les equacions clàssiques en relativitat.

5 El tensor d'impulsió-energia d'un fluid

Suposem com abans, un fluid en moviment. Anomenem tensor d'impulsió-energia del fluid el tensor dues vegades contravariant

$$T = \frac{1}{c^2} (\sigma \vec{u} \otimes \vec{u} - \mathcal{T}) .$$

Amb aquesta definició l'equació (16.4) s'escriu

$$c^2 \operatorname{div} T = f .$$

Utilitzant la mètrica (de Minkowski) podem pensar T , quan ens convingui, com a tensor dues vegades covariant, o bé com a tensor una vegada contravariant i una vegada covariant. En aquest últim cas serà una aplicació lineal.

Veurem ara que si pensem T com a aplicació lineal, el camp de velocitats $\vec{u}$ és vector propi de T corresponent al valor propi $-\sigma$. En efecte, fixem un punt qualsevol (x, t) de l'espai de Minkowski i utilitzem en aquest punt una referència per a la qual $\vec{u}$ sigui el vector director de l'eix del temps. Utilitzant components respecte a aquesta referència, tindrem

$$T(u)^i = T_k^i u^k = T_4^i ,$$

ja que en aquesta referència $\vec{u} = (0, 0, 0, 1)$. Tindrem

$$T(u)^i = T_4^i = \frac{\sigma}{c^2} u^i u_4 - \underbrace{\frac{1}{c^2} \mathcal{T}_4^i}_{=0} = \frac{\sigma}{c^2} u^i g_{44} u^4 = -\sigma u^i .$$

Es pot veure que T no té altre vector propi temporal llevat del mateix $\vec{u}$ multiplicat per constants. El vector $\sigma \vec{u}$ és el vector densitat d'impulsió-energia de cada partícula del fluid (o densitat de quantitat de moviment a l'espai de Minkowski). Aquest vector s'obté de T com l'únic vector temporal de norma *ic* que és vector propi de T , multiplicat per l'oposat del seu valor propi. Dit d'una altra manera, el coneixement de T porta, com a cas particular, al coneixement del vector densitat d'impulsió-energia. El coneixement de T també conté tota la informació sobre les forces internes (energia interna del fluid). Per tot això és natural la denominació de tensor d'impulsió-energia.

6 El tensor d'impulsió-energia dels fluids perfectes

Ara veurem que si el fluid és perfecte el seu tensor d'impulsió-energia ve donat per

$$T = \frac{1}{c^2} \left(\sigma + \frac{p}{c^2} \right) \vec{u} \otimes \vec{u} + \frac{p}{c^2} g, \quad (16.6)$$

on p és la pressió del fluid (funció que vam introduir en mecànica clàssica de fluids quan parlàvem de fluids perfectes) i g és la mètrica de Minkowski, considerada, aquí, com a tensor dues vegades contravariant. Hem de tenir en compte que el signe de p depèn de com s'hagi definit aquest escalar. Si considerem que p és la pressió que la partícula que es troba en un determinat punt exerceix sobre les altres, el signe de p és tal com l'hem pres. Si es considera que p indica la pressió que la resta del fluid fa sobre la partícula, llavors s'ha de canviar el signe de p . Per veure que el tensor d'impulsió-energia d'un fluid ve donat per (16.6), situem-nos en un punt de l'espai de Minkowski i prenguem una referència en aquell punt per a la qual el vector $\vec{u}$ sigui el vector director de l'eix del temps. Designem per $\tilde{T}$ el segon membre de (16.6) i per T el tensor d'impulsió-energia. Les components de $\tilde{T}$ en aquesta referència seran

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{\alpha\beta} &= \frac{p}{c^2} g^{\alpha\beta} \quad ; \quad \tilde{T}^{\alpha 4} = 0 \\ \tilde{T}^{44} &= \frac{1}{c^2} \left(\sigma + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{p}{c^2} g^{44} = \frac{\sigma}{c^2}, \end{aligned}$$

ja que $g^{44} = -1/c^2$. D'altra banda, les components de $T = (1/c^2)(\sigma u \otimes u - \mathcal{T})$ seran

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= -\frac{\mathcal{T}^{\alpha\beta}}{c^2} = \frac{p}{c^2} g^{\alpha\beta} \\ T^{\alpha\beta} &= -\frac{\mathcal{T}^{\alpha 4}}{c^2} = 0 \quad ; \quad T^{44} = \frac{\sigma}{c^2}. \end{aligned}$$

Capítol 17

Electromagnetisme i relativitat especial

1 Les equacions de Maxwell i l'equació de continuïtat

Vegem ara com formulem les equacions de Maxwell del capítol 13 en el marc de la relativitat especial. Recordem que en aquell capítol caracteritzàvem un medi continu de càrregues elèctriques en moviment per la densitat de càrrega ρ i pel vector densitat de corrent $\vec{J}$ tangent a les trajectòries, de manera que la càrrega $Q(V)$ del medi contingut en una regió V de l'espai vingui donada per

$$Q(V) = \int_V \rho(x) dx ,$$

i el vector $\vec{J}$ sigui $\rho\vec{v}$, on $\vec{v}$ és el camp de velocitats de les partícules carregades. Aquest medi en moviment engendrava un camp elèctric $\vec{E}$ i un camp magnètic $\vec{B}$ que complien les equacions de Maxwell

$$\text{div } E = 4\pi\rho$$

$$\text{rot } B = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\text{div } B = 0 ,$$

a més de l'equació de continuïtat

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = 0.$$

Si una partícula amb una càrrega elèctrica q es deixava sota l'acció d'aquests camps amb una velocitat $\vec{v}$, sobre ella actuava una força

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{Llei de Lorentz}).$$

Aquest plantejament clàssic necessitava d'un espai i d'un temps absolut ja que no era pas invariant per canvis de referències inercials. Nosaltres voldríem ara descobrir unes lleis intrínseques (invariants per canvis de referències inercials) que s'aproximessin el màxim possible a les equacions clàssiques. Procedirem amb la mateixa filosofia que hem aplicat en el cas de la mecànica de fluids.

La funció densitat de càrrega ρ depèn òbviamment del sistema inercial utilitzat. Ara bé, tal com hem fet en el cas de la mecànica de fluids, podríem definir la densitat pròpia σ de la manera següent. Sigui P una partícula carregada qualsevol del medi en moviment. En un instant qualsevol τ_0 del seu temps propi considerem un sistema inercial S' tal que a l'instant $t' = 0$ el seu origen coincideixi amb la partícula P i que la velocitat de P respecte a S' sigui nul·la en aquell instant (sistema propi de la partícula a τ_0). Mesurant llavors a S' la densitat de càrrega a l'origen a l'instant $t' = 0$, obtindrem un nombre σ que s'anomena densitat pròpia de càrrega a P a l'instant τ_0 . Aquesta densitat de càrrega només depèn de la partícula P i del seu temps propi τ_0 .

La vida de cada partícula és descrita per una corba a l'espai de Minkowski, la qual pot ser parametritzada pel temps propi τ de la partícula. Sigui $\vec{\gamma}(\tau)$ aquesta corba. El vector velocitat a l'espai de Minkowski $\vec{u} = d\vec{\gamma}/d\tau$ és intrínsec. Designem per $\vec{j}$ el vector de l'espai de Minkowski $\sigma\vec{u}$, on σ és la densitat pròpia (concepte intrínsec).

Prenguem ara un sistema inercial S des del qual observem el medi de càrregues en moviment. Aquest sistema inercial donarà lloc a una referència de l'espai de Minkowski. Siguin $\vec{E}$ i $\vec{B}$ el camp elèctric i magnètic creats pel medi en moviment i mesurats des de S . Sigui α la 2-forma diferencial a l'espai de Minkowski que, en les coordenades respecte a la referència d'aquest espai originada per S , s'expressa

$$\alpha = 2c \sum_{\alpha} E^{\alpha} dx^{\alpha} \wedge dt + 2B^1 dx^2 \wedge dx^3 + 2B^2 dx^3 \wedge dx^1 + 2B^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Observem que les dues equacions

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial B}{\partial t} + c \operatorname{rot} E = 0$$

equivalen a l'única equació $d\alpha = 0$. Tindrem, a més,

$$\vec{j} = \sigma \vec{u} = \sigma \frac{d\vec{\gamma}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \sigma(v^1, v^2, v^3, 1) \frac{dt}{d\tau}.$$

Per a velocitats petites del medi respecte al sistema inercial S , les tres primeres components de $\vec{j}$ originen aproximadament el vector $\vec{J}$ clàssic, ja que $\vec{J} = \rho \vec{v}$, on ρ és la densitat referida a S . La quarta component de $\vec{j}$ serà, també aproximadament, la densitat de càrrega relativa a S .

Calculem ara la divergència de la 2-forma α respecte a la mètrica de Minkowski. Les components α_{ij} de α vénen donades per la matriu antisimètrica següent:

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^3 & B^2 & -cE^1 \\ B^3 & 0 & -B^1 & -cE^2 \\ -B^2 & B^1 & 0 & -cE^3 \\ cE^1 & cE^2 & cE^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Adoptem la convenció que el primer índex representa l'índex de columna i el segon, l'índex de fila. Així, per exemple, α_{12} és B^3 (coeficient de $dx^1 \wedge dx^2$). Tindrem

$$(\operatorname{div} \alpha)^i = \nabla_j \alpha^{ij},$$

amb

$$(\alpha^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^3 & B^2 & \frac{E^1}{c} \\ B^3 & 0 & -B^1 & \frac{E^2}{c} \\ -B^2 & B^1 & 0 & \frac{E^3}{c} \\ -\frac{E^1}{c} & -\frac{E^2}{c} & -\frac{E^3}{c} & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim, doncs,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \alpha &= \left(\overbrace{\operatorname{rot} B + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}}^{\text{tres primeres components}}, \quad \frac{1}{c} \operatorname{div} E \right) = \\ &= (\text{per les equacions de Maxwell}) = \frac{4\pi}{c} (\vec{J}, \rho). \end{aligned}$$

Si volem que les equacions de Maxwell tinguin una formulació intrínseca i que per a velocitats petites i acceleracions no massa grans s'obtingui la teoria clàssica, basta posar

$$\begin{cases} \operatorname{div} \alpha = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ d\alpha = 0. \end{cases}$$

Observem que a partir del camp elèctric $\vec{E}$ i del camp magnètic $\vec{B}$ respecte a un sistema inercial S es fabrica la 2-forma α a l'espai de Minkowski, la qual es postula que és intrínseca. Això significa exactament que si la construïssim a partir de mesuraments realitzats en un altre sistema inercial, arribaríem a la mateixa α : en canviar de sistema inercial, el camp elèctric $\vec{E}$ i el camp magnètic $\vec{B}$ canviaran, però donaran lloc a la mateixa α . Per exemple, suposem un medi en repòs respecte a un sistema inercial S . Aquest medi crearà un camp elèctric $\vec{E}$ en el sistema inercial S . Però des d'un sistema inercial S' que es mogui respecte a S , el medi ja no estarà en repòs. Com que les càrregues elèctriques en moviment generen un camp magnètic, des de S' hi haurà camp elèctric i camp magnètic. No obstant això, es postula que la 2-forma diferencial α és la mateixa, independentment de la referència de l'espai de Minkowski des d'on sigui fabricada. Els conceptes de camp elèctric i camp magnètic no són intrínsecs, però la 2-forma α sí. La 2-forma α és tancada ($d\alpha = 0$) i està relacionada amb el vector densitat de corrent $\vec{j}$ a l'espai de Minkowski per $\text{div } \alpha = (4\pi/c)\vec{j}$.

Observem que a l'espai de Minkowski es compleix $\text{div}(\text{div } \alpha) = 0$. En efecte,

$$\text{div}(\text{div } \alpha) = \nabla_j \nabla_i \alpha^{ij}.$$

Com que els símbols de Christoffel de l'espai de Minkowski respecte a qualsevol referència lineal són nuls,

$$\text{div}(\text{div } \alpha) = \partial_i \partial_j \alpha^{ij},$$

amb $\partial_i = \partial/\partial x^i$. Ara bé, si canviem el nom dels índexs entre ells,

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j \alpha^{ij} &= \partial_j \partial_i \alpha^{ji} = (\text{per Schwarz}) = \partial_i \partial_j \alpha^{ji} = \\ &= (\text{pel fet que } \alpha \text{ és antisimètrica}) = -\partial_i \partial_j \alpha^{ij}. \end{aligned}$$

(Tinguem en compte que en les igualtats anteriors hem omès els sumatoris respecte als índexs repetits i, j .) La igualtat anterior implica que $\partial_i \partial_j \alpha^{ij} = 0$.

D'aquí deduïm $\text{div } j = (c/4\pi) \text{div}(\text{div } \alpha) = 0$. Ara bé,

$$0 = \text{div } j = \frac{\partial j^1}{\partial x^1} + \frac{\partial j^2}{\partial x^2} + \frac{\partial j^3}{\partial x^3} + \frac{\partial j^4}{\partial t} \cong \text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Veiem, doncs, que l'equació $\text{div } j = 0$ és la que substitueix en el cas relativista l'equació de continuïtat clàssica

$$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

amb la diferència que aquí no cal imposar-la, ja que es dedueix de $\text{div } \alpha = (4\pi/c)\vec{j}$.

2 Força a què està sotmesa una càrrega en un camp electromagnètic

Suposem una partícula de càrrega q submergida en un camp electromagnètic. El moviment de la partícula serà descrit per una corba $\gamma(\tau)$ de l'espai de Minkowski parametritzada pel temps propi τ . Sigui $u = d\gamma/d\tau$ el vector velocitat de la partícula a l'espai de Minkowski. Sigui F l'únic vector de l'espai de Minkowski tal que

$$g(X, F) = \frac{q}{c} \alpha(X, u) \quad \forall X,$$

on g és la mètrica de Minkowski i α el camp electromagnètic. Fixem un sistema inercial S que donarà lloc a una referència de l'espai de Minkowski. Si prenem components respecte a aquesta referència, tindrem

$$F^j = \frac{q}{c} u^i \alpha_i^j,$$

amb $\alpha_i^j = g^{jk} \alpha_{ki}$. (α_i^j) serà la matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & -B^3 & B^2 & \frac{E^1}{c} \\ B^3 & 0 & -B^1 & \frac{E^2}{c} \\ -B^2 & B^1 & 0 & \frac{E^3}{c} \\ cE^1 & cE^2 & cE^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com que

$$\vec{u} = (v^1, v^2, v^3, 1) \frac{dt}{d\tau},$$

tindrem

$$\begin{aligned} F^1 &= \frac{q}{c} (B^3 v^2 - B^2 v^3) \frac{dt}{d\tau} + qE^1 \frac{dt}{d\tau} \\ F^2 &= \frac{q}{c} (-B^3 v^1 + B^1 v^3) \frac{dt}{d\tau} + qE^2 \frac{dt}{d\tau} \\ F^3 &= \frac{q}{c} (B^2 v^1 - B^1 v^2) \frac{dt}{d\tau} + qE^3 \frac{dt}{d\tau} \\ F^4 &= \frac{q}{c} (E^1 u^1 + E^2 u^2 + E^3 u^3). \end{aligned}$$

Si $\vec{f}$ designa el vector de l'espai ordinari format per les tres primeres components de $\vec{F}$, $\vec{f} = (F^1, F^2, F^3)$, tindrem que

$$\vec{f} = \overbrace{\left(\frac{q}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E} \right)}^{\text{força clàssica}} \frac{dt}{d\tau},$$

i la quarta component és la potència de la força $\vec{f}$. Observem ara detingudament la interpretació relativista donada a l'apartat 3 del capítol 15 de les quatre components de la força de Minkowski i ens adonarem que la llei de Lorentz clàssica s'haurà de substituir per la següent llei intrínseca: si una partícula de càrrega q està submergida en un camp electromagnètic, està sotmesa a una força de Minkowski $\vec{F}$ que està relacionada amb el camp electromagnètic α per

$$g(\vec{X}, \vec{F}) = \frac{q}{c} \alpha(\vec{X}, \vec{u}) \quad \forall X,$$

on $\vec{u}$ és la velocitat de la partícula a l'espai de Minkowski.

Capítol 18

Els fonaments de la relativitat general

El marc natural de la teoria de la relativitat que hem desenvolupat fins ara ha estat l'espai de Minkowski. Qualsevol fenomen tenia una descripció natural en aquest espai i en ell les lleis físiques no eren altra cosa que lleis geomètriques. Però encara no hem formulat una llei que substitueixi la de gravitació de Newton, segons la qual dos cossos s'atreuen amb una força de mòdul directament proporcional al producte de les seves masses i inversament proporcional al quadrat de les seves distàncies. Per formular aquesta llei de manera natural en el marc de la relativitat, veurem que l'espai de Minkowski no ens serveix i haurem d'utilitzar mètriques més generals. Per tal de veure aquesta necessitat, analitzarem amb detall un exemple que encara es pot formular i interpretar a l'espai de Minkowski.

1 L'exemple del disc giratori

Sigui S un sistema inercial. Sigui S' un disc de radi R contingut en el pla $z = 0$ de la referència de S . Suposarem que aquest disc pot girar entorn del seu centre O , que és a la vegada l'origen de S , però que, de moment, està parat. Suposem que colloquem en cada punt P d'aquest disc un rètol amb les dues coordenades polars (r, θ) del punt P , on r indica la distància de P a l'origen O , i θ l'angle de $\overline{PO}$ amb l'eix de les x de S . Tot això ho fem amb el disc parat. Suposem que a l'instant $t = 0$ del sistema inercial S el disc comença a girar entorn del seu origen amb velocitat angular constant ω . Suposem que $\omega R < c$. Cada punt P del disc sobre el qual hi ha el rètol amb els nombres (r, θ) descriurà, en el seu moviment respecte a S , la corba

$$\begin{cases} x(t) &= r \cos(\omega t + \theta) \\ y(t) &= r \sin(\omega t + \theta) \\ z &= 0 \end{cases}, \quad (18.1)$$

on (x, y, z) són les coordenades de P respecte al sistema inercial S , i t és el temps de S . D'ara endavant prescindirem de la coordenada z (que és nul·la sempre). Una vegada el disc S' estigui en moviment, els habitants de S' podran utilitzar els nombres (r, θ) com a coordenades de cada punt sense necessitat de fer cap mesurament. Bastarà que llegeixin el rètol col·locat sobre cada punt. Els observadors de S representaran el moviment d'un punt P de coordenades (r, θ) a S' per la corba de l'espai de Minkowski

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), t),$$

on $x(t)$ i $y(t)$ vénen donats per (18.1). Aquí agafem l'espai de Minkowski de dimensió 3 ja que prescindim de la coordenada z . La norma del vector tangent $\dot{\gamma}(t)$ a aquesta corba és $\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\omega^2 r^2 - c^2}$, que no depèn del temps. El temps propi de la partícula P serà, doncs,

$$\tau = \frac{1}{ic} \left(\sqrt{\omega^2 r^2 - c^2} \right) t = \sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} t. \quad (18.2)$$

Per tant, el temps propi depèn de r . Els rellotges de S' aniran cada vegada més a poc a poc a mesura que r vagi augmentant. Els observadors de S' no tindran, doncs, un temps comú que coincideixi amb el temps propi de cada observador. No obstant això, com que coneixen la regla de canvi dels seus temps propis en funció de r , poden adoptar com a temps comú el temps de l'origen $r = 0$, que coincideix amb el temps t de S . Quan un observador de S' mesuri un interval de temps amb el seu temps propi τ , l'haurà de traduir al temps "oficial" de S' mitjançant (18.2). Una vegada adoptat aquest temps comú, els observadors de S' podran representar qualsevol esdeveniment per les coordenades (r, θ, t) . Aquestes coordenades es relacionen amb les de S per

$$\begin{cases} x = r \cos(\omega t + \theta) \\ y = r \sin(\omega t + \theta) \\ t = t \end{cases}. \quad (18.3)$$

Qualsevol punt immòbil de S' de coordenades (r_0, θ_0) descriurà la corba $t \rightarrow (r_0, \theta_0, t)$ a l'espai-temps, que utilitzant les coordenades (x, y, z) de S serà l'hèlice

$$\gamma(t) \begin{cases} x(t) &= r_0 \cos(\omega t + \theta_0) \\ y(t) &= r_0 \sin(\omega t + \theta_0) \\ t &= t \end{cases},$$

que parametritzada pel seu temps propi τ serà

$$\gamma(\tau) \begin{cases} x(\tau) &= r_0 \cos\left(\frac{\omega}{\alpha_0}\tau + \theta_0\right) \\ y(\tau) &= r_0 \sin\left(\frac{\omega}{\alpha_0}\tau + \theta_0\right) \\ t(\tau) &= \frac{\tau}{\alpha_0} \end{cases},$$

on $\alpha_0 = \sqrt{1 - r_0^2\omega^2/c^2}$. El vector acceleració a l'espai de Minkowski és

$$\frac{d^2\gamma(\tau)}{d\tau^2} = -\frac{\omega^2 r_0}{\alpha_0^2} \left(\cos\left(\frac{\omega}{\alpha_0}\tau + \theta_0\right), \sin\left(\frac{\omega}{\alpha_0}\tau + \theta_0\right), 0 \right).$$

O sigui, que un punt material de massa m immòbil respecte a S' en el punt (r_0, θ_0) experimenta una força de Minkowski $md^2\gamma(\tau)/d\tau^2$ el mòdul de la qual és $m\omega^2 r_0/\alpha_0^2$ i que està dirigida cap a l'origen de S' (força centrípeta).

Hem fet aquests càlculs utilitzant les coordenades (x, y, z) de S . Fem-los ara tal com els faria un observador de S' , i, si les matemàtiques no fallen i la teoria està ben construïda, hauríem d'arribar al mateix resultat, ja que el concepte de força de Minkowski és intrínsec.

Els observadors de S' ho referiran tot a les seves coordenades (r, θ, t) . El primer que hem de fer és saber com s'expressa la mètrica de Minkowski en les coordenades (r, θ, t) . De (18.3) deduïm

$$\begin{cases} dx = \cos(\omega t + \theta)dr - r\omega \sin(\omega t + \theta)dt - r \sin(\omega t + \theta)d\theta \\ dy = \sin(\omega t + \theta)dr + r\omega \cos(\omega t + \theta)dt + r \cos(\omega t + \theta)d\theta \\ dt = dt \end{cases}.$$

Per tant,

$$g = dx^2 + dy^2 - c^2 dt^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + 2r^2 \omega dt d\theta - (c^2 - r^2 \omega^2) dt^2. \quad (18.4)$$

Un punt fix de S' de coordenades (r_0, θ_0) descriurà la corba $\gamma(t) = (r_0, \theta_0, t)$ que tindrà com a vector tangent $\dot{\gamma}(t) = (0, 0, 1)$. La norma d'aquest vector, segons (18.4), serà $\sqrt{-(c^2 - r_0^2 \omega^2)}$. El temps propi serà, doncs,

$$\tau = \frac{\sqrt{-(c^2 - r_0^2 \omega^2)}}{ic} t = \sqrt{1 - \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2}} t.$$

γ , parametritzada pel temps propi, serà

$$\gamma(\tau) = \left(r_0, \theta_0, \frac{\tau}{\alpha_0} \right), \quad \text{amb } \alpha_0 = \sqrt{1 - \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2}}.$$

L'acceleració $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ d'aquesta corba tindrà coordenades

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})^i = \ddot{\gamma}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k.$$

Com que $\dot{\gamma}^1 = \dot{\gamma}^2 = 0$ i $\dot{\gamma}^3 = 1/\alpha_0$, tindrem $\ddot{\gamma}^i = 0$. Per tant,

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})^i = \frac{1}{\alpha_0^2} \Gamma_{33}^i.$$

Calculem els símbols de Christoffel Γ_{33}^i . Tenim

$$\Gamma_{jk,l} = g_{il} \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right).$$

La mètrica g en el punt (r_0, θ_0, t) ve donada per

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_0^2 & r_0^2 \omega \\ 0 & r_0^2 \omega & r_0^2 \omega^2 - c^2 \end{pmatrix}. \quad (18.5)$$

Per tant,

$$\Gamma_{33,l} = \frac{\partial g_{3l}}{\partial x^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^l}.$$

Ara bé, l'única coordenada respecte a la qual les derivades de les g no són nul·les és r (la primera). Per tant, l'únic $\Gamma_{33,l}$ no nul és

$$\Gamma_{33,1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -r_0 \omega^2.$$

Així doncs, $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ tindrà components covariants $\frac{1}{\alpha_0^2}(-r_0 \omega^2, 0, 0)$. Aquí indiquem per “components covariants” les següents:

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})_i = g_{ij} (\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})^j.$$

Per passar aquestes components a les components contravariants habituals, $(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})^i$, els haurem d'aplicar la matriu g^{-1} inversa de g . La matriu inversa de (18.5) és

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0^2} - \frac{\omega^2}{c^2} & \frac{\omega}{c^2} \\ 0 & \frac{\omega}{c^2} & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix}. \quad (18.6)$$

Per tant, les components contravariants de $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ són les mateixes que abans. És a dir,

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \frac{1}{\alpha_0^2}(-r_0\omega^2, 0, 0).$$

Si la partícula té massa m , el vector força de Minkowski és, en aquestes coordenades,

$$\vec{F} = \frac{mr_0\omega^2}{\alpha_0^2}(-1, 0, 0), \quad (18.7)$$

que és el mateix que ens havia sortit abans (força de mòdul $mr_0\omega^2/\alpha_0^2$ dirigida cap a l'origen de S').

Resumint, una partícula de massa m immòbil respecte a S' situada en el punt de coordenades (r_0, θ_0) està sotmesa a la força centrípeta (18.7). Si prenem ara una partícula Q de massa m i la deixem en llibertat al punt (r_0, θ_0) a l'instant $t = 0$ sense comunicar-li cap velocitat inicial, per als observadors de S' , aquesta partícula es mourà. Si γ és la corba a l'espai de Minkowski corresponent al moviment de la partícula Q , $\gamma(t) = (r(t), \theta(t), t)$, amb $\gamma(0) = (r_0, \theta_0, 0)$, la condició que no actuï cap força sobre Q s'escriurà $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$. Utilitzant les tres coordenades (r, θ, t) , l'equació anterior s'escriu

$$\ddot{\gamma}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0. \quad (18.8)$$

L'equació (18.8) en el punt $t = 0$ (en virtut de les components de $\dot{\gamma}(0)$), s'escriu

$$\ddot{\gamma}^i = -\Gamma_{33}^i.$$

Si l'observador de S' refereix l'acceleració aparent $\ddot{\gamma}^i$ no al temps oficial t , sinó al seu temps propi $\tau = \alpha_0 t$, trobarà una acceleració

$$\frac{d^2\gamma^i}{d\tau^2} = \frac{1}{\alpha_0^2}\ddot{\gamma}^i = -\frac{1}{\alpha_0^2}\Gamma_{33}^i,$$

i això li farà pensar que sobre la partícula actua una força (massa per acceleració) de components $-(1/\alpha_0^2)m\Gamma_{33}^i$. O sigui, una força igual i de sentit contrari a la centrípeta (força centrífuga). Això ho pensarà l'observador de S' perquè referirà el moviment a les seves coordenades. En canvi, l'observador del sistema inercial S (S' no és inercial!) pensarà, com així és, que sobre la partícula no actua cap força. La força centrífuga no és altra cosa que el fruit d'una mala elecció de les coordenades (el fet de referir-ho tot al sistema S' , que no és inercial).

Suposem que l'observador de S' que està situat en el punt (r_0, θ_0) , quan ha fet l'experiment anterior de deixar en llibertat la partícula de massa m a l'instant $t = 0$, estigués tancat dins d'una caixa immòbil respecte a ell que li impedis veure el món exterior. Un tal observador podria suposar que la força aparent que sofreix la partícula Q és produïda per un camp gravitatori que atreu la partícula. Si en lloc de deixar en llibertat una partícula de massa m , deixés lliure en el mateix punt una partícula de massa M , aquesta última sofriria exactament la mateixa acceleració que la primera. Això és una característica dels camps gravitoris. Naturalment, si la caixa on és l'observador fos suficientment gran, podria adonar-se que aquesta (segons ell) força gravitòria tindria un mòdul que seria aproximadament directament proporcional a la distància a l'origen i no podria, per tant, trobar cap cos que d'acord amb la llei de Newton creés un tal camp gravitatori.

Resumint: si la caixa és petita no hi ha manera de discernir si la força aparent que actua sobre les partícules en llibertat és una força "real" produïda per un camp gravitatori o bé si és una força "aparent" deguda al moviment de la caixa respecte a observadors inercials.

Proseguim l'estudi d'alguns aspectes interessants d'aquest exemple que ens poden haver passat desapercebuts.

Els observadors de S' , quan mesurin la longitud de la circumferència $r = r_0$ no trobaran pas $2\pi r_0$, sinó $2\pi r_0 / \sqrt{1 - r_0^2 \omega^2 / c^2}$. Per veure això primer farem un raonament intuïtiu ràpid i després ja el precisarem més. Suposem que per mesurar la longitud de la circumferència $r = r_0$ en el sistema S' es divideix aquesta en n arcs consecutius iguals, $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$, amb n suficientment gran perquè cada un pugui confondre's amb la corda i pugui, doncs, ser considerat recte. En un instant donat els observadors de S dibuixen a S els arcs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ que coincideixen amb $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$ i els mesuren, després, a S . La mesura de cada α_i serà igual a la mesura a S' de α'_i multiplicada per $\sqrt{1 - \omega^2 r_0^2 / c^2}$. Per tant, si la longitud de la circumferència val $2\pi r_0$ a S , a S' valia

$$\frac{2\pi r_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}}}.$$

Apressem-nos a dir que si es mesura el radi a S' , com que les mesures es fan en la direcció perpendicular al moviment (i en aquesta direcció les distàncies no s'alteren), es trobarà la mateixa mesura r_0 que a S . Per als observadors de S' la relació entre les circumferències centrades a l'origen i el seu diàmetre no serà π , com a S , sinó més gran que π . La geometria de l'espai de S' (no la de l'"espai-temps") ha deixat, doncs, de ser euclidiana.

Precisem l'argument anterior amb una mica més de rigor. Un observador de

S' situat a $P_0 = (r_0, \theta_0)$ no és pas inercial. Fixat un instant de temps $t = t' = 0$, considerem un sistema inercial S'' tal que per a $t'' = 0$ l'origen de S'' coincideixi amb P_0 i que la velocitat de P_0 en aquell moment respecte a S'' sigui nul·la. Per a cada punt $P = (r, \theta)$ immòbil respecte a S' tindrem a l'instant $t = t' = 0$ un tal S'' que dependrà de P . Designem-lo, doncs, per S''_P . Tots els S''_P es mouen els uns respecte als altres i, per tant, les distàncies canviaran segons el sistema en què es mesurin. Nosaltres, en virtut dels axiomes pels quals hem introduït la relativitat especial, sabem mesurar distàncies en els sistemes inercials, i S' no ho és. Per donar una definició de “mesurar distàncies” a S' que sigui compatible amb els mesuraments fets en tots els sistemes inercials, l'única alternativa que tenim és pensar que les distàncies de S' vénen donades per una mètrica de Riemann que té com a mètrica tangent en cada punt P la mètrica de S''_P . Tot això que hem dit es refereix a l'espai ordinari de S' (no a l'espai-temps). El temps aquí està fixat, $t' = 0$. Cada $P_0 = (r_0, \theta_0)$ origina la corba $\gamma(t) = (r_0, \theta_0, t)$ de l'espai de Minkowski amb vector tangent $\dot{\gamma}(0) = (0, 0, 1)$. La referència S''_{P_0} donarà lloc a una referència de l'espai de Minkowski que tindrà $\dot{\gamma}(0)$ com a vector director de l'eix del temps i com a “espai” el pla perpendicular a $\dot{\gamma}(0)$ en el punt $\gamma(0) = (r_0, \theta_0, 0)$. Si designem per (R, Θ, T) les components d'un vector qualsevol d'origen $\gamma(0)$, la condició de perpendicularitat amb $\dot{\gamma}(0)$ s'escriurà, en virtut de (18.4),

$$r_0^2 \omega \Theta - (c^2 - r_0^2 \omega^2) T = 0 .$$

És a dir,

$$T = \frac{r_0^2 \omega}{c^2 - r_0^2 \omega^2} \Theta .$$

Els vectors d'origen $\gamma(0)$ perpendiculars a $\dot{\gamma}(0)$ són, doncs,

$$\left(R, \Theta, \frac{r_0^2 \omega}{c^2 - r_0^2 \omega^2} \Theta \right) .$$

El producte escalar, amb la mètrica (18.4), d'un d'aquests vectors amb un altre, les components del qual designem per “primes”, serà

$$RR' + \left(r_0^2 + \frac{(r_0^2 \omega)^2}{c^2 - r_0^2 \omega^2} \right) \Theta \Theta' = RR' + \frac{r_0^2}{1 - \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2}} \Theta \Theta' .$$

Aquesta és la mètrica de l'“espai” del sistema inercial S''_{P_0} . Per tant, la mètrica de Riemann que induirà cada una d'aquestes mètriques a l'“espai” de S' serà

$$dr^2 + \frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} d\theta^2 , \quad (18.9)$$

mètrica que no és euclidiana.

Una observació molt important és que la mètrica (18.9) de l'“espai” de S' a l'instant $t = t' = 0$ no és pas, com es podria pensar, la restricció a l'hiperplà $t = 0$ de la mètrica (18.4) (aquesta restricció és $dr^2 + r^2 d\theta^2$). Això seria veritat si es donés la casualitat (cosa que aquí no passa) que l'espai de les (r, θ) fos perpendicular a l'eix del temps per la mètrica de Minkowski.

2 Teoria de la gravitació

L'exemple anterior ens mostra que un observador situat dins d'una petita caixa situada en el disc giratori no podrà distingir si la causa del moviment dels cossos deixats en llibertat és un camp gravitatori o bé és una força deguda al seu propi moviment. Ara bé, sigui quina sigui la causa del moviment dels cossos deixats en llibertat, podrà representar els esdeveniments en un espai de dimensió 3 de coordenades (r, θ, t) , i en aquest espai la vida d'un cos deixat en llibertat serà representada per una corba $\gamma(t)$ que complirà l'equació $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$, on la derivada covariant ∇ està referida a la mètrica

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + 2r^2 \omega dt d\theta - (c^2 - r^2 \omega^2) dt^2. \quad (18.10)$$

Aquest exemple (i molts d'altres de similars que es poden construir) ens porta a concebre la idea que un camp gravitatori no és altra cosa que la modificació de la mètrica usual de l'espai de Minkowski. Quan no hi ha cap camp gravitatori, la vida d'una partícula deixada en llibertat és representada per una geodèsica de l'espai de Minkowski $\gamma(\tau)$ de vector tangent temporal que apunta cap al futur (o sigui, contingut en el con C^+). (A l'espai de Minkowski, geodèsica i recta és el mateix.) Quan hi ha un camp gravitatori, la mètrica usual de Minkowski es canvia per una altra, però la vida d'una partícula deixada en llibertat també és representada (com quan no hi havia camp gravitatori) per una corba de l'espai-temps, $\gamma(\tau)$, que parametritzada pel seu temps propi és una geodèsica de la nova mètrica.

A l'exemple, però, mitjançant un canvi de coordenades complicat (el canvi invers de (18.3)), podem posar la mètrica (18.10) en la forma habitual de Minkowski. En general, però, no podem pas imposar aquesta condició als camps gravitoris. El que sí que és lògic de suposar és que la mètrica induïda en cada espai tangent es pot posar, mitjançant un canvi de coordenades a l'espai tangent, com la mètrica de Minkowski. Això equival a suposar que la mètrica és no degenerada i té índex 1. Recordem que una mètrica g en un espai vectorial E de dimensió 4 es diu no degenerada i d'índex 1 quan es pot trobar una base e_1, e_2, e_3, e_4 respecte a la qual la matriu (g_{ij}) de productes escalars

$g_{ij} = g(e_i, e_j)$ és diagonal de la forma

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Resumint, per a nosaltres, localment, un camp gravitatori serà una mètrica de Riemann g no definida positiva, no degenerada i d'índex 1, en un obert U de $\mathbf{R}^4$, juntament amb una orientació temporal (passat-futur) de la qual parlarem després. Les trajectòries d'un cos deixat en llibertat sota l'acció del camp gravitatori seran representades per geodèsiques d'aquesta mètrica de vector tangent temporal apuntant cap al futur. Les trajectòries dels raigs de llum seran representades per geodèsiques de vector tangent de norma nul·la apuntant cap al futur (igual que a l'espai de Minkowski els raigs de llum són representats per rectes de vector director de norma nul·la). Un observador qualsevol no serà altra cosa que una corba de l'espai-temps de vector tangent temporal apuntant cap al futur. Elegit un punt arbitrari d'aquesta corba, el paràmetre longitud a partir d'aquest punt, dividit per ic , s'anomenarà temps propi de l'observador. En problemes globals substituïm l'espai-temps U , que fins ara era un obert de $\mathbf{R}^4$, per una varietat de Riemann (M, g) , la mètrica g de la qual compleixi les condicions anteriors.

Si $\gamma(\tau)$ representa a l'espai-temps la trajectòria d'un cos deixat en llibertat i si (x^1, x^2, x^3, t) són coordenades arbitràries en una carta local de l'espai-temps de manera que el vector $\partial/\partial t$ sigui temporal i apunti al futur, la condició de geodèsica serà representada per

$$\ddot{\gamma} + \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0,$$

amb $i, j, k = 1, 2, 3, 4$. Els observadors $\gamma_{(x^1, x^2, x^3)}(t) = (x^1, x^2, x^3, t)$ tindran la impressió que el cos en llibertat sofreix una acceleració donada per

$$\ddot{\gamma}^i = -\Gamma_{ij}^i \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k, \quad (18.11)$$

i atribuiran el moviment del cos a una força de Minkowski igual al producte de la massa del cos per l'acceleració (18.11). Però aquesta força no serà real, sinó fruit de l'especial elecció dels observadors.

Com que en l'expressió dels símbols de Christoffel intervenen les primeres derivades de les components g_{ij} de la mètrica, veiem en l'expressió (18.11) que en les components de la força gravitatòria (fictícia) intervenen les derivades primeres de la mètrica. En mecànica clàssica tota força que deriva d'un potencial V ve donada per les primeres derivades de V . Això ens porta a pensar,

per analogia, que els coeficients g_{ij} de la mètrica són allò que en relativitat substitueix el potencial gravitatori clàssic. Per aquesta raó les g_{ij} s'anomenen potencials gravitatoris.

3 Orientabilitat temporal

A l'espai de Minkowski ($\mathbf{R}^4$ amb la mètrica $g = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - c^2 dt^2$) consideràvem el con C format pels vectors (temporals) X que complien $g(X, X) < 0$. C constava de dues components connexes. Anomenàvem C^+ la component connexa continguda en el semiespai $t > 0$. Es deia que un vector temporal $\vec{u}$ apuntava cap al futur si $\vec{u} \in C^+$. Ara bé, en els espai-temps més generals (M, g) que hem considerat a l'apartat anterior, ¿què vol dir que un vector temporal apunti cap al futur? Definim de manera precisa aquest concepte.

Una *varietat de Lorentz* és, per definició, un parell (M, g) , on M és una varietat diferenciable de dimensió 4 i g un camp tensorial dues vegades covariant que compleix la condició que per a cada $x \in M$ existeix una base e_1, e_2, e_3, e_4 de l'espai tangent $T_x(M)$ tal que els productes escalars $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ vénen donats per una matriu diagonal

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Un vector $v \in T_x(M)$ s'anomena temporal si $g(v, v) < 0$, s'anomena espacial si $g(v, v) > 0$ i s'anomena nul o de norma nul·la si $g(v, v) = 0$. Designem per C_x el con de $T_x(M)$ format pels vectors temporals. C_x té dues components connexes. Direm que una varietat de Lorentz (M, g) és orientable respecte al temps si per a cada punt $x \in M$ es pot escollir una component connexa de C_x , que designarem per C_x^+ , de manera que es compleixi la següent condició de coherència: en cada carta local U de M existeix un camp vectorial diferenciable X tal que $X_x \in C_x^+$ per a cada $x \in U$. L'elecció efectiva de C_x^+ en cada $T_x(M)$ que compleixi la condició anterior s'anomena una orientació temporal de M .

Proposició 18.1 *Una varietat de Lorentz (M, g) és orientable respecte al temps si i només si existeix un camp vectorial X sobre tot M amb la condició $g(X, X) < 0$ en cada punt.*

DEMOSTRACIÓ. Si existeix un tal X , per orientar M temporalment bastarà escollir C_x^+ en cada $T_x(M)$ com la component connexa de C_x que conté

X_x . Recíprocament, suposem que tenim ara una orientació temporal de M . Prenguem un recobriment $\{U_i\}$ de M localment finit de manera que cada U_i sigui domini d'una carta local i que cada $\bar{U}_i$ sigui compacte (recordem que una varietat diferenciable és sempre paracompacta d'acord amb les definicions del capítol 4). Sigui $\{f_i\}$ una partició de la unitat subordinada a $\{U_i\}$. Sigui X_i un camp vectorial sobre U_i amb $(X_i)_x \in C_x^+$. Llavors $X = \sum f_i X_i$ és un camp vectorial global que compleix la condició desitjada. ■

Una varietat de Lorentz (M, g) orientable respecte al temps, amb l'elecció d'una orientació temporal, s'anomenarà *espai-temps*. En un espai-temps M , es diu que un vector tangent $v \in T_x(M)$ apunta cap al futur si $g(v, w) < 0$ per a algun $w \in C_x^+$. Si $v \in C_x^+$, la condició anterior es compleix prenent $w = v$ (ja que $g(v, v) < 0$). Per tant, tots els $v \in C_x^+$ apunten cap al futur. Ara bé, si v és un vector de norma nul·la llavors apunta cap al futur si $v \neq 0$ i v pertany a l'adherència de C_x^+ .

4 L'equació d'Einstein

Situem-nos de moment en el marc de la mecànica clàssica. Considerem un medi continu. La matèria que conté és descrita per la densitat de massa σ . Aquesta matèria crea un camp gravitatori el potencial V del qual està relacionat amb σ mitjançant l'equació de Poisson

$$\Delta V = 4\pi K\sigma, \quad (18.12)$$

on K és la constant de gravitació universal. Nosaltres hem obtingut aquesta equació al capítol 13, apartat 2, per al potencial del camp elèctric i allà hem pres les unitats de manera que $K = 1$. El canvi de signe del segon membre de (18.12) respecte a la fórmula establerta al capítol 13 és degut al fet que en el cas del camp elèctric, càrregues d'igual signe es repel·leixen i en el cas del camp gravitatori dos cossos sempre s'atreuen.

Situem-nos ara en el marc de la relativitat general. Hem vist que el potencial gravitatori V quedava substituït per la mètrica g . Si V (que és un escalar) queda substituït per un tensor g , σ haurà de substituir-se per un tensor del mateix ordre que g . ¿Per quin? Al capítol 16 hem vist que la matèria, des del punt de vista de la relativitat especial, era descrita pel tensor d'impulsió-energia T (tensor d'ordre 2, igual que g), el qual contenia tota la informació sobre la matèria (incloent-hi la densitat σ). Aquest tensor T complia l'equació

$$c^2 \operatorname{div} T = f,$$

on f era la densitat de força exterior. Si suposem ara que la matèria del medi continu crea el camp gravitatori i si suposem, per simplificar, que no hi ha càrregues elèctriques, o sigui que no existeix cap força deguda al camp electromagnètic, com que a la descripció de la gravitació que hem fet a l'apartat 2 no existien les forces gravitatòries, la matèria no estarà subjecta a cap força exterior, i per tant el tensor T d'impulsió-energia complirà la condició

$$\operatorname{div} T = 0. \quad (18.13)$$

Així doncs, en el marc de la relativitat general una matèria que no contingui càrregues elèctriques serà descrita pel tensor d'impulsió-energia T que compleix la condició (18.13).

Quan passem, doncs, de la mecànica clàssica a la relativitat, el potencial gravitatori clàssic V és substituït per la mètrica g i la densitat σ pel tensor d'impulsió-energia T . Ara hauríem de trobar una equació que relacionés g i T i que substituís l'equació de Poisson (18.12). L'equació que busquem haurà de ser una equació entre tensors i d'altra banda haurà de ser intrínseca. El primer membre de l'equació que busquem haurà de ser, doncs, un tensor $\tilde{G}$ intrínsec (que no depengui d'un sistema de coordenades particular) i que només depengui de g (de la mateixa manera que el primer membre de (18.12) només depèn de V). $\tilde{G}$ en qualsevol carta local hauria de contenir derivades fins a l'ordre 2 de les g_{ij} , de la mateixa manera que el primer membre de (18.12) conté derivades fins a l'ordre 2 de V . El segon membre de l'equació que busquem hauria de ser el tensor d'impulsió-energia T de la matèria, multiplicat per una constant k . L'equació que busquem per substituir a (18.12) hauria de ser, doncs, de la forma

$$\tilde{G} = kT. \quad (18.14)$$

Ara bé, com que T ha de complir (18.13), $\tilde{G}$ haurà de complir, també, $\operatorname{div} \tilde{G} = 0$. Per trobar l'equació concreta que substitueixi (18.12), l'única cosa que ens resta és trobar un tensor d'ordre 2, $\tilde{G}$, intrínsec, que compleixi $\operatorname{div} \tilde{G} = 0$ i que en cada carta local s'expressi només en funció de les derivades de les g_{ij} fins a l'ordre 2. ¿Quins tensors coneixem que compleixin totes aquestes condicions? Sabem que si prenem

$$G = \operatorname{Ric} - \frac{1}{2}Rg, \quad (18.15)$$

on Ric és el tensor de Ricci (vegeu capítol 5) i R la curvatura escalar, tindrem $\operatorname{div} G = 0$ en virtut del corollari 5.36 de l'apartat 15 del capítol 5. Òbviament, G s'expressa en cada carta local en funció de les derivades fins a l'ordre 2 de

les g_{ij} . Einstein, d'acord amb això, va proposar el tensor G definit per (18.15) com el tensor que havia de figurar en el primer membre de (18.14), equació que havia de substituir l'equació de Poisson en el marc de la relativitat general. Per això l'equació (18.14) amb $\tilde{G} = G$ es coneix per equació d'Einstein del camp gravitatori, i el tensor G definit per (18.15) és conegut com a tensor d'Einstein. Ara bé, ¿podria haver-hi altres tensors $\tilde{G}$ que complissin $\text{div } \tilde{G} = 0$ i que en cada carta local s'expressessin en funció de les derivades fins a l'ordre 2 de les g_{ij} ? Evidentment, si a G hi afegim Λg , on Λ és una constant, obtindrem el tensor

$$\tilde{G} = G + \Lambda g = \text{Ric} - \frac{1}{2} Rg + \Lambda g, \quad (18.16)$$

que també tindrà divergència nul·la (ja que g té divergència nul·la) i que en cada carta local també s'expressarà en funció de les derivades fins a l'ordre 2 de les g_{ij} . Poincaré va demostrar que els únics tensors d'ordre 2 que complien aquestes condicions eren els tensors $\tilde{G}$ donats per (18.16), dels quals el d'Einstein és un cas particular amb $\Lambda = 0$. Després d'aquest resultat de Poincaré sembla que l'únic candidat natural per a substituir (18.12) en el marc de la relativitat general és l'equació

$$G + \Lambda g = kT, \quad (18.17)$$

on Λ i k són constants. Einstein mateix, a la vista d'aquest resultat, va dubtar entre prendre l'equació anterior amb $\Lambda = 0$ tal com havia proposat inicialment, o prendre-la amb $\Lambda \neq 0$. En tot cas veurem que la constant Λ hauria de ser molt petita per tal que de l'equació (18.17) s'obtingués l'equació clàssica de Poisson com a primera aproximació.

5 Aproximació newtoniana de l'equació d'Einstein i determinació de la constant k

Malgrat totes les consideracions de l'apartat anterior, encara hauríem de veure que l'equació (18.17) dóna aproximadament l'equació clàssica (18.12) per a camps gravitatoris febles.

La mètrica de Minkowski η de $\mathbf{R}^4$ en les coordenades canòniques (x^1, x^2, x^3, x^4) , amb $x^4 = ct$, s'expressa per la matriu diagonal

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

En absència de camp gravitatori, l'espai-temps seria justament $\mathbf{R}^4$ amb aquesta mètrica. Suposem ara que tenim un camp gravitatori feble produït per una massa concentrada en una regió acotada de l'espai. Una hipòtesi natural és suposar que quan el camp gravitatori és feble la mètrica que li correspon no s'aparta gaire de la de Minkowski. Això equival a dir que podem trobar unes coordenades (x^1, x^2, x^3, x^4) de l'espai-temps en les quals la mètrica g que correspon al camp gravitatori s'expressa per

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij},$$

amb els valors absoluts de les h_{ij} petits (en comparació amb 1). És lògic suposar, a més, que a l'infinit la mètrica g s'aproxima a la de Minkowski, o sigui

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h_{ij}(x) = 0,$$

ja que l'acció del camp gravitatori tendeix a desaparèixer a l'infinit, pel fet d'haver suposat que la massa que el crea està concentrada en una regió acotada de l'espai.

Si suposem, a més, que el camp gravitatori no varia amb el temps, les h_{ij} no dependran de x^4 . La hipòtesi que el camp gravitatori és feble ens porta a suposar que les variacions de les g_{ij} són petites, o sigui que $|\partial h_{ij}/\partial x^k|$ és petit en comparació amb 1 (les forces aparents que provoca el camp gravitatori vénen donades per aquestes derivades). Si $x(\tau) = (x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau), x^4(\tau))$ és la corba que representa el moviment d'una partícula en llibertat sota l'acció del camp, on τ és el temps propi, tindrem

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau}. \quad (18.18)$$

Suposarem que els índexs corresponents a les lletres llatines varien d'1 a 4, i els corresponents a les lletres gregues, d'1 a 3. Amb aquesta convenció, de (18.18) deduïm

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} - 2\Gamma_{\beta 4}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^4}{d\tau} - \Gamma_{44}^\alpha \left(\frac{dx^4}{d\tau}\right)^2. \quad (18.19)$$

Si suposem que la velocitat de la partícula és petita en comparació amb la de la llum, el temps propi coincidirà gairebé amb el temps newtonià i es tindrà

$$\frac{dx^4}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} \cong c.$$

L'equació (18.19) s'escriurà, llavors, aproximadament

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} - 2c\Gamma_{\beta 4}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} - c^2\Gamma_{44}^\alpha. \quad (18.20)$$

En mecànica clàssica l'acceleració d'una partícula que es mou lliurement sota l'acció d'un camp gravitatori no depèn de la velocitat de la partícula. Això ens condueix a suposar que per a velocitats petites respecte a c , el primer i segon terme del segon membre de (18.20) són petits en relació amb $c^2\Gamma_{44}^\alpha$. Per tant, (18.20) s'escriurà aproximadament

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -c^2\Gamma_{44}^\alpha. \quad (18.21)$$

Ara bé,

$$\Gamma_{44}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha i} \left(2\frac{\partial g_{4i}}{\partial x^4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x^i} \right).$$

De les hipòtesis que hem fet, es té $\partial g_{4i}/\partial x^4 = 0$. Com que (g_{ij}) és una matriu gairebé diagonal, (g^{ij}) també ho serà, i tindrem

$$\Gamma_{44}^\alpha \cong -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{44}}{\partial x^\alpha}. \quad (18.22)$$

Per tant, (18.21) s'escriurà

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} \cong \frac{1}{2}c^2\frac{\partial h_{44}}{\partial x^\alpha}. \quad (18.23)$$

Com que (18.23) ha de ser l'aproximació newtoniana de (18.17), si anomenem V el potencial gravitatori de Newton, comparant (18.23) amb l'equació de Newton

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x^\alpha}, \quad (18.24)$$

veiem que h_{44} ha de ser aproximadament $-2V/c^2 + C$, on C és una constant a determinar. Com que tant V com h_{44} s'anul·len a l'infinit, C s'haurà d'anul·lar. Per tant,

$$h_{44} \cong -\frac{2V}{c^2}.$$

Per escriure l'equació d'Einstein (18.14) en el nostre cas, suposem, de moment, que el medi continu que crea el camp gravitatori és un fluid perfecte (per tal de treballar en un model concret), malgrat que aquesta hipòtesi no serà essencial, com veurem. D'acord amb el capítol 16, apartat 6, tindrem

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \frac{p}{c^2}g^{\alpha\beta} \cong \frac{p}{c^2}\delta_{\alpha\beta} \\ T^{\alpha 4} &= 0 \\ T^{44} &= \sigma. \end{aligned} \quad (18.25)$$

(Tinguem en compte que al capítol 16, apartat 6, treballàvem amb les coordenades (x^1, x^2, x^3, t) de $\mathbf{R}^4$ i aquí treballem amb les coordenades (x^1, x^2, x^3, x^4) on $x^4 = ct$.)

De l'equació d'Einstein es dedueix

$$g^{ij}\tilde{G}_{ij} = kg^{ij}T_{ij} \cong k\left(\frac{3p}{c^2} - \sigma\right). \quad (18.26)$$

Però

$$g^{ij}\tilde{G}_{ij} = g^{ij}\left(R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} + \Lambda g_{ij}\right) = R - \frac{4}{2}R + 4\Lambda = -R + 4\Lambda.$$

Per tant, (18.26) s'escriu

$$-R + 4\Lambda \cong k\left(\frac{3p}{c^2} - \sigma\right) \cong -k\sigma.$$

D'aquí deduïm $R \cong k\sigma + 4\Lambda$. De l'equació d'Einstein obtenim, també, $\tilde{G}_{44} = kT_{44} = k\sigma$. O sigui,

$$R_{44} - \frac{1}{2}Rg_{44} + \Lambda g_{44} = k\sigma.$$

O sigui,

$$R_{44} \cong \left(\frac{1}{2}R - \Lambda\right)\eta_{44} + k\sigma = -\frac{1}{2}R + \Lambda + k\sigma \cong \frac{k\sigma}{2} - \Lambda. \quad (18.27)$$

Però

$$R_{44} = \sum R_{4i4} = \sum_i \left(\frac{\partial \Gamma_{44}^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{i4}^i}{\partial x^4} \right) + \sum_{i,m} (\Gamma_{44}^m \Gamma_{im}^i - \Gamma_{4i}^m \Gamma_{4m}^i).$$

Ara bé, com que les g no depenen de t , $\partial \Gamma_{i4}^i / \partial x^4 = 0$. A més, com que les Γ són petites, el seu producte encara ho serà més i, per tant, el podem considerar menyspreable. Tindrem, doncs,

$$R_{44} \cong \sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma_{44}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \cong -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 h_{44}}{\partial (x^{\alpha})^2}.$$

Substituint a (18.27), tindrem

$$-\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 h_{44}}{\partial (x^{\alpha})^2} = \frac{k\sigma}{2} - \Lambda.$$

Tenint en compte que $h_{44} = -2V/c^2$, tindrem

$$\Delta V = \frac{kc^2}{2}\sigma - \Lambda c^2 .$$

Comparant aquesta equació amb la de Poisson veiem que k ha de ser igual a $8K\pi/c^2$, on K és la constant de gravitació universal de Newton i $\Lambda = 0$. La hipòtesi de fluid perfecte que hem fet no és pas necessària. En realitat basta suposar que les components del tensor de pressions són petites en comparació amb c .

Se'ns pot dir que els valors $k = 8K\pi/c^2$ i $\Lambda = 0$ que hem obtingut són aproximats ja que hem utilitzat aproximacions de les equacions relativistes. Hi estem d'acord. Diguem que Λ , si no és la constant zero, haurà de tenir un valor molt petit. D'ara endavant, prendrem $\Lambda = 0$. Quant a la relació $k \cong 8K\pi/c^2$, hem de dir que la constant de gravitació K està definida només dins de la teoria clàssica de Newton i que la teoria mateixa ja no és exacta i no té sentit per a camps gravitatoris forts.

Hem de dir que la constant d'Einstein k no és pas una constant abstracta, sinó que té dimensions. De la igualtat $G = kT$ es desprèn immediatament que les dimensions de k són longitud $\times$ pes⁻¹.

Capítol 19

Camp gravitatori produït per una estrella

En aquest capítol tractarem de descriure el camp gravitatori engendrat per una estrella esfèrica. Com que, segons la teoria de la relativitat general, el camp gravitatori només es manifesta a través de la mètrica g de l'espai-temps M , tractarem de construir un model d'espai-temps (M, g) que s'adapti a aquesta situació. Només ens interessarà, però, el camp gravitatori a l'exterior de l'estrella. Des del punt de vista de Newton, l'estrella crearia un camp gravitatori descrit per una funció potencial V que ha de complir l'equació de Poisson

$$\Delta V = 4\pi K\sigma,$$

on K és la constant de gravitació universal. Fora de l'estrella la densitat de massa σ és nul·la i, per tant, el potencial V compleix l'equació $\Delta V = 0$. Des del punt de vista relativista, a l'exterior de l'estrella la mètrica g complirà l'equació d'Einstein

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg = 0. \quad (19.1)$$

Veurem a continuació que aquesta equació és equivalent a

$$\text{Ric} = 0. \quad (19.2)$$

En efecte, si indiquem per R_{ij} les components del tensor de Ricci en una determinada carta local, de (19.1) deduïm

$$g^{ij} \left(R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} \right) = 0.$$

I com que $g^{ij}R_{ij} = R$ i $g^{ij}g_{ij} = 4$, l'equació anterior implica $R - (\frac{4}{2})R = 0$, d'on $R = 0$. Llavors (19.1) queda reduïda a (19.2). Recíprocament, si $\text{Ric} = 0$ llavors també $R = 0$ i (19.2) es pot escriure com (19.1).

Poc després que Einstein formulés la teoria de la relativitat general Schwarzschild va construir una mètrica g que complia (19.2), que tenia simetria esfèrica i que era estàtica (ja precisarem més endavant aquests conceptes). L'espai-temps de Schwarzschild descriu perfectament el camp gravitatori exterior produït per estrelles no gaire denses. Posteriorment, a través de la mètrica de Schwarzschild també es va tractar d'interpretar el camp gravitatori produït per estrelles de gran densitat: els forats negres. En aquesta interpretació la mètrica deixava de ser estàtica i ja no tenia sentit usar els primitius arguments de Schwarzschild per mostrar que la mètrica havia de tenir l'expressió que ell havia donat. En la majoria de presentacions que es poden trobar d'aquest tema a la literatura, no està justificat en absolut que es pugui utilitzar la mètrica de Schwarzschild per descriure els forats negres. Per tal de superar aquesta dificultat utilitzarem el punt de vista de Bergman, Cahen i Koman en el seu article *Spherically symmetric gravitational fields* (J. Math. Phys. 6 (1965), 1-5). Abans necessitem, però, alguns rudiments de foliacions i grups de Lie que resumim a continuació. Aconsellàriem, potser, que en primera lectura s'ometessin els apartats següents (1, 2, 3 i 4), que contenen el material matemàtic necessari per a l'estudi físic del problema, i es passés directament a l'apartat 5.

1 Rudiments sobre foliacions

En aquesta secció resumirem els conceptes bàsics sobre foliacions que utilitzarem més endavant. No demostrarem les proposicions d'aquesta secció. Per a això remetrem el lector de manera especial al llibre de F. Warner titulat *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* (Scott, Foresman and Company, 1971).

Comencem definint el concepte de subvarietat d'una varietat diferenciable. Sigui M una varietat diferenciable. Una subvarietat diferenciable N de M és un subconjunt $N \subset M$ amb una estructura de varietat diferenciable (capítol 4) de tal manera que la inclusió canònica $i: N \rightarrow M$ és una aplicació diferenciable i que en cada punt $x \in N$ l'aplicació lineal tangent $(di)_x: T_x(N) \rightarrow T_x(M)$ és injectiva.

Si M és una varietat diferenciable, una distribució S de dimensió r sobre M consisteix, per definició, a assignar a cada punt $x \in M$ un subespai vectorial S_x de $T_x(M)$ de dimensió r . Una tal distribució es diu diferenciable si per a cada punt $x \in M$ existeixen un entorn U de x i r camps vectorials diferenciables,

$X_1 \dots X_r$, sobre U , que en cada punt $y \in U$ formen una base de S_y .

Si S és una distribució diferenciable de M , direm que un camp vectorial X de M és de la distribució i escriurem, fent un abús de llenguatge, $X \in S$ si en cada $x \in M$ es compleix $X_x \in S_x$. Una distribució S de M es diu involutiva si compleix la condició següent:

$$X \in S, Y \in S \implies [X, Y] \in S.$$

Una distribució involutiva s'anomena, també, foliació.

Sigui S una distribució diferenciable de M . Una subvarietat N de M es diu subvarietat integral de la distribució si en cada $x \in N$ l'espai $(di)_x(T_x(N))$, on i és la inclusió canònica, (que és un subespai de $T_x(M)$) coincideix amb S_x .

Sigui S una distribució diferenciable de M que compleixi la condició que per a cada $x \in M$ passa una subvarietat integral de la distribució. Llavors S és involutiva. En efecte, si X i Y són dos camps vectorials de S i x és un punt de M , veurem que $[X, Y]_x \in S_x$. Sigui N una subvarietat integral de S que passi per x . Com que en cada $y \in N$ es té $X_y, Y_y \in S_y = T_y(N)$, X i Y donen lloc a camps de N . Com que el claudàtor de dos camps tangents a N és tangent, $[X, Y]_y \in T_y(N) = S_y$ per a tot $y \in N$.

El recíproc del resultat anterior constitueix el teorema de Frobenius, un dels resultats bàsics sobre el qual es fonamenta la teoria de foliacions. Direm que una carta local (U, φ) d'una varietat M , amb U obert de M i $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ un homeomorfisme de U sobre $\varphi(U)$, és una carta local cúbica si $\varphi(U)$ és un cub obert de $\mathbf{R}^n$, això és, si existeixen $p \in \varphi(U)$ i constants positives $K^1 \dots K^n$ de manera que $\varphi(U) = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n \text{ tals que } |x^i - p^i| < K^i \text{ per a } i = 1, \dots, n\}$.

Teorema 19.1 (Teorema de Frobenius) *Sigui M una varietat diferenciable i S una distribució involutiva de dimensió r . Cada $x_0 \in M$ té un entorn U que és domini d'una carta local cúbica (U, φ) , de tal manera que per a cada $c = (c^1 \dots c^n) \in \varphi(U)$ la subvarietat de U donada per les equacions $x^{r+1} = c^{r+1}, \dots, x^n = c^n$ (on $(x^1 \dots x^n)$ són les coordenades de U associades a la carta local (U, φ)) és subvarietat integral de S .*

Dues distribucions diferenciables S i S' sobre una varietat M es diuen transverses si en cada punt $x \in M$ es compleix $S_x \oplus S'_x = T_x(M)$. Nosaltres necessitem la següent generalització del teorema de Frobenius.

Teorema 19.2 *Siguin S i S' dues distribucions sobre M , la primera de dimensió r i la segona de dimensió $n - r$. Si S i S' són involutives i transverses, cada punt $x_0 \in M$ té un entorn U que és domini d'una carta local cúbica (U, φ) , de tal manera que per a cada $c = (c^1 \dots c^n) \in \varphi(U)$ la subvarietat de U donada*

per les equacions $x^{r+1} = c^{r+1}, \dots, x^n = c^n$ és subvarietat integral de S , i la subvarietat de U donada per les equacions $x^1 = c^1, \dots, x^r = c^r$ és subvarietat integral de S' .

Aquest teorema, pel fet de ser un corollari immediat de l'anterior, no se sol trobar a la majoria de llibres. Donem-ne, doncs, la demostració.

DEMOSTRACIÓ. Sigui (U_1, φ_1) una carta local cúbica de centre x_0 , de tal manera que per a cada $c = (c^1 \dots c^n) \in \varphi_1(U_1)$ la subvarietat de U_1 donada per $x^1 = c^1, \dots, x^r = c^r$ és subvarietat integral de S' (teorema de Frobenius). Sigui (U_2, φ_2) una altra carta local cúbica de centre x_0 (anomenem ara $y^1 \dots y^n$ les coordenades corresponents), de tal manera que per a cada $c = (c^1 \dots c^n) \in \varphi_2(U_2)$ la subvarietat de U_2 donada per $y^{r+1} = c^{r+1}, \dots, y^n = c^n$ és subvarietat integral de S . Sigui P_1 la composició

$$U_1 \xrightarrow{\varphi_1} \varphi_1(U_1) \subset \mathbf{R}^n \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{R}^r,$$

on π_1 és la projecció $(x^1 \dots x^n) \rightarrow (x^1 \dots x^r)$. Sigui P_2 la composició

$$U_2 \xrightarrow{\varphi_2} \varphi_2(U_2) \subset \mathbf{R}^n \xrightarrow{\pi_2} \mathbf{R}^{n-r}.$$

Pel teorema de la funció inversa, l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} U_1 \cap U_2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R}^n \\ x & \longrightarrow & (P_1(x), P_2(x)) \end{array}$$

és un difeomorfisme local en un entorn de x_0 , ja que l'aplicació lineal tangent de φ en el punt x_0 és un isomorfisme. Sigui U un entorn de x_0 sobre el qual φ sigui un difeomorfisme de U sobre $\varphi(U)$ i tal que $\varphi(U)$ sigui un cub de $\mathbf{R}^n$. Llavors (U, φ) és la carta local buscada. ■

2 Conceptes bàsics de grups de Lie

En aquesta secció resumirem els conceptes bàsics de grups de Lie que farem servir més endavant. No donarem demostracions de la major part de proposicions. Per a això remetrem el lector, per exemple, al llibre de F. Warner titulat *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* (Scott, Foresman and Company, 1971).

Un grup de Lie no és altra cosa que un grup G dotat d'una estructura de varietat diferenciable, de tal manera que l'operació de grup

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (a, b) & \longrightarrow & a \cdot b^{-1} \end{array}$$

és una aplicació diferenciable. Suposarem, a més, que G compleix el segon axioma de numerabilitat (o sigui, que existeix una base numerable d'oberts de G). Donat $g \in G$, designarem per L_g l'aplicació $G \rightarrow G$ donada per $x \rightarrow gx$ (que és una aplicació diferenciable). Un camp vectorial diferenciable X sobre G s'anomena invariant per l'esquerra si $(L_g)_* X_{g^{-1}x} = X_x$ per a tot $x \in G$ i $g \in G$. El conjunt $\mathcal{G}$ de tots els camps vectorials X sobre G invariants per l'esquerra té una estructura natural d'àlgebra de Lie sobre $\mathbf{R}$, amb la suma, multiplicació per reals i claudàtor usals dels camps vectorials sobre una varietat. $\mathcal{G}$, amb aquesta estructura, s'anomena àlgebra de Lie de G . Com a espai vectorial, $\mathcal{G}$ és isomorf a l'espai tangent $T_e(G)$, on e és l'element neutre de G . En efecte, l'aplicació $\mathcal{G} \rightarrow T_e(G)$ donada per $X \rightarrow X_e$ és un isomorfisme d'espais vectorials (per exemple, si $X_e = 0$ llavors X és nul, ja que $X_g = L_g X_e = 0$).

Cada $X \in \mathcal{G}$ genera un grup uniparamètric de transformacions φ_t , que és global (o sigui, $\varphi_t(g)$ està definit per a tot $t \in \mathbf{R}$ i tot $g \in G$). En efecte, el grup uniparamètric local φ_t corresponent a X compleix la propietat $L_g \varphi_t = \varphi_t L_g$ per a tot $g \in G$, ja que $L_g(X_{g^{-1}x}) = X_x$. Si φ_t està definit per a $|t| < \varepsilon$, sigui t_0 un nombre real qualsevol amb $t_0 \neq 0$ i $|t_0| < \varepsilon$. Considerem $g = \varphi_{t_0}(e)$. Tindrem

$$\varphi_{t_0}(e) \cdot \varphi_t(e) = L_g \varphi_t(e) = \varphi_t L_g e = \varphi_t(g) = \varphi_t(\varphi_{t_0}(e)) = \varphi_{t+t_0}(e).$$

O sigui, $\varphi_{t_0}(e) \cdot \varphi_t(e) = \varphi_{t+t_0}(e)$. El membre de l'esquerra està definit per a $|t| < \varepsilon$. Com que $\varphi_{t_0}(e) \cdot \varphi_{t_0}(e) = \varphi_{2t_0}(e)$, $\varphi_{2t_0}(e)$ està definit. Pel mateix raonament estaran definits $\varphi_{3t_0}(e)$, $\varphi_{4t_0}(e)$, ... etc. Això prova que φ_t és global. L'element $\varphi_1(e)$ s'anomena exponencial de X i s'escriu $\exp X = \varphi_1(e)$. Es pot veure immediatament que $\exp tX = \varphi_t(e) \forall t$.

Proposició 19.3 *Sigui G un grup de Lie i H un subgrup de G tancat (com a subconjunt de l'espai topològic G). Llavors H es pot dotar d'una única estructura de subvarietat diferenciable de G , que el converteix en un grup de Lie.*

Per exemple, el grup $GL(n, \mathbf{R})$ d'automorfismes lineals de $\mathbf{R}^n$ pot identificar-se amb el grup de matrius $n \times n$ de determinant diferent de zero. D'aquesta manera, $GL(n, \mathbf{R})$ pot considerar-se com un obert de $\mathbf{R}^{n^2}$ i llavors hereta de $\mathbf{R}^{n^2}$ una estructura de varietat diferenciable que el converteix en un grup de Lie. El grup $O(n)$ d'isometries de $\mathbf{R}^n$ i el grup $SO(n)$ d'isometries de $\mathbf{R}^n$ que conserven l'orientació són subgrups compactes de $GL(n, \mathbf{R})$. En virtut de la proposició anterior hereten una estructura de grups de Lie. $O(n)$ no és pas connex. Té dues components connexes que es poden identificar respectivament amb el conjunt de matrius de $O(n)$ de determinant 1 i el conjunt de matrius

de determinant -1 . La component connexa de $O(n)$ que conté la identitat és precisament $SO(n)$.

Si G és un grup de Lie i M és una varietat diferenciable, una acció de G sobre M és, per definició, una aplicació diferenciable $G \times M \rightarrow M$, que escriurem $(g, x) \rightarrow gx$, que ha de complir les propietats següents:

- 1) $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x \quad \forall g_1, g_2 \in G \text{ i } \forall x \in M$.
- 2) $ex = x \quad \forall x \in M$, on e és l'element neutre de G .

Una acció de G sobre M es diu *transitiva* si, donats dos punts x i y de M , existeix $g \in G$ tal que $gx = y$. Una acció de G sobre M es diu *efectiva* si la condició $gx = x$ per a tot $x \in M$ implica $g = e$.

Per exemple, $GL(n, \mathbf{R})$ actua de manera natural sobre $\mathbf{R}^n$,

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ (A, v) &\longrightarrow Av, \end{aligned}$$

on Av indica el producte de la matriu A per la matriu d'una sola columna formada per les components de v . Aquesta acció no és transitiva ja que $A0 = 0$ per a tot A . En canvi, l'acció anterior dóna lloc, per restricció, a una acció

$$GL(n, \mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^n - \{0\}) \longrightarrow (\mathbf{R}^n - \{0\})$$

que sí que és transitiva.

Si $G \times M \rightarrow M$ és una acció de G sobre M , donat $x_0 \in M$, el conjunt $I_{x_0} = \{g \in G \text{ tals que } gx_0 = x_0\}$ és un subgrup tancat de G (i per la proposició 19.3 és un grup de Lie). I_{x_0} s'anomena *subgrup d'isotropia* de x_0 . Un punt $x_0 \in M$ es diu fix per l'acció de G si $gx_0 = x_0$ per a tot $g \in G$, la qual cosa equival a dir que $I_{x_0} = G$. De la continuïtat de l'aplicació $G \times M \rightarrow M$ es desprèn que el conjunt de punts fixos de M per l'acció de G és un tancat de M .

Sigui G un grup de Lie i H un subgrup tancat de G . Sigui G/H el conjunt quocient de G per la relació d'equivalència $g_1 \sim g_2$ si $g_1^{-1}g_2 \in H$. La classe $[g]$ de g és el subconjunt gH . (G/H , en general, no és un grup. Només ho serà quan H sigui un subgrup normal.) Sigui π la projecció canònica $G \rightarrow G/H$ que assigna a cada $g \in G$ la seva classe gH . Considerem a G/H la topologia quocient, que consisteix a dir que un subconjunt $U \subset G/H$ és obert si $\pi^{-1}(U)$ és obert a G .

Proposició 19.4 Si G és un grup de Lie i H és un subgrup tancat, G/H es pot dotar d'una estructura natural de varietat diferenciable de tal manera que

l'aplicació

$$\begin{aligned} G \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (g_1, g_2H) &\longrightarrow g_1g_2H \end{aligned}$$

és una acció diferenciable de G sobre G/H .

Proposició 19.5 *Sigui G un grup de Lie, M una varietat diferenciable, i $G \times M \rightarrow M$ una acció transitiva de G sobre M . Sigui x_0 un punt qualsevol de M i H el subgrup d'isotropia de x_0 . Llavors l'aplicació natural*

$$\begin{aligned} G/H &\longrightarrow M \\ gH &\longrightarrow gx_0 \end{aligned}$$

és un difeomorfisme.

D'aquesta proposició es dedueix que l'estructura de varietat diferenciable sobre G/H donada per la proposició 19.4 és única entre les que compleixen la propietat que

$$\begin{aligned} G \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (g_1, g_2H) &\longrightarrow g_1g_2H \end{aligned}$$

és una acció diferenciable de G sobre G/H .

Per exemple, $SO(n)$ actua de manera natural sobre la varietat S^{n-1} de vectors de $\mathbf{R}^n$ de norma 1. Aquesta acció $SO(n) \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ és transitiva. El grup d'isotropia del pol nord de S^{n-1} és $SO(n-1)$. D'acord amb la proposició 19.5 tindrem $S^{n-1} \cong SO(n)/SO(n-1)$.

3 Varietats de Lorentz amb simetria esfèrica

Direm que una varietat de Lorentz (M, g) té simetria esfèrica si existeix una acció efectiva $SO(3) \times M \rightarrow M$ de $SO(3)$ sobre M que compleix les dues propietats següents:

- 1) Per a cada $\alpha \in SO(3)$, l'aplicació $M \rightarrow M$ donada per $x \rightarrow \alpha x$ és una isometria.
- 2) Per a cada $x \in M$ que no és un punt fix per l'acció de $SO(3)$, el conjunt $\mathcal{S}(x) = \{\alpha x \mid \forall \alpha \in SO(3)\}$, anomenat òrbita de x per l'acció de $SO(3)$, és una subvarietat espacial de M de dimensió 2 ("espacial" vol dir que per a cada $y \in \mathcal{S}(x)$, la mètrica g restringida a $T_y(\mathcal{S}(x)) \subset T_y(M)$ és definida positiva).

Si $I(M)$ designa el grup d'isometries de (M, g) , la condició 1 ens dóna un morfisme $SO(3) \rightarrow I(M)$ definit per $\alpha \rightarrow (x \rightarrow \alpha x)$. El fet que l'acció sigui efectiva equival a dir que el morfisme anterior és injectiu. Tindrem, per tant, $SO(3) \subset I(M)$.

Donem ara alguns exemples de varietats de Lorentz amb simetria esfèrica.

$SO(3)$ actua de manera natural sobre $\mathbf{R}^3$. Fem actuar ara $SO(3)$ sobre $\mathbf{R}^4$ de la manera següent:

$$\begin{aligned} \lambda: \quad SO(3) \times \mathbf{R}^4 &\longrightarrow \mathbf{R}^4 \\ (\alpha, (x^1, x^2, x^3, x^4)) &\longrightarrow (\alpha(x^1, x^2, x^3), x^4), \end{aligned}$$

on $\alpha(x^1, x^2, x^3)$ indica l'acció natural de $SO(3)$ sobre $\mathbf{R}^3$. Els punts fixos de l'acció λ són els de la recta $x^1 = x^2 = x^3 = 0$. Prenguem sobre $\mathbf{R}^4$ la mètrica de Minkowski. Òbviament, $(\mathbf{R}^4, g)$ admet simetria esfèrica per l'acció λ .

Segui ara M l'obert de $\mathbf{R}^4$ format pels punts (x^1, x^2, x^3, x^4) amb $(x^1, x^2, x^3) \neq (0, 0, 0)$. Anomenem també g la restricció a M de la mètrica de Minkowski. L'acció λ dóna lloc, per restricció, a una acció $SO(3) \times M \rightarrow M$ sense punts fixos. Llavors (M, g) admet simetria esfèrica per aquesta acció.

Considerem, finalment, un exemple amb dues corbes de punts fixos. Segui S^3 l'esfera unitat de $\mathbf{R}^4$. L'acció λ de $SO(3)$ sobre $\mathbf{R}^4$ descrita anteriorment dóna lloc, per restricció, a una acció $SO(3) \times S^3 \rightarrow S^3$ que deixa fixos el pol nord $P_n = (0, 0, 0, 1)$ i el pol sud $P_s = (0, 0, 0, -1)$ de l'esfera S^3 . Segui ara $M = S^3 \times \mathbf{R}$ amb la mètrica $g = g_S - dt^2$, on g_S és la mètrica sobre S^3 obtinguda per restricció de la mètrica euclidiana usual de $\mathbf{R}^4$ i t és la coordenada canònica de $\mathbf{R}$. Fem actuar $SO(3)$ sobre M de la manera següent:

$$\begin{aligned} SO(3) \times M &\longrightarrow M \\ (\alpha, (x, t)) &\longrightarrow (\alpha(x), t), \end{aligned}$$

on $x \in S^3$ i $t \in \mathbf{R}$. Òbviament, (M, g) admet simetria esfèrica per aquesta acció. Els punts fixos d'aquesta acció són tots els de les dues rectes $\{P_n\} \times \mathbf{R}$ i $\{P_s\} \times \mathbf{R}$.

El nostre objectiu en aquesta secció és veure si la condició que una varietat de Lorentz (M, g) admeti simetria esfèrica ens permet dir com ha de ser localment la mètrica g . Ens proposem provar el resultat següent.

Teorema 19.6 *Segui (M, g) una varietat de Lorentz amb simetria esfèrica $SO(3) \times M \rightarrow M$. Cada punt x_0 de M que no és fix per l'acció de $SO(3)$*

admet un entorn U que és domini d'una carta local cúbica $(U, r, t, \theta, \varphi)$ en què la mètrica g s'expressa

$$g = \pi_1^*(d\omega^2) + K^2(r, t)\pi_2^*(d\Omega^2),$$

on π_1 i π_2 són respectivament les projeccions $(r, t, \theta, \varphi) \rightarrow (r, t, \theta_0, \varphi_0)$ i $(r, t, \theta, \varphi) \rightarrow (r_0, t_0, \theta, \varphi)$, amb $(r_0, t_0, \theta_0, \varphi_0)$ les coordenades de x_0 , $d\omega^2$ és una mètrica d'índex 1 sobre la superfície $\mathcal{C}_0$ d'equacions $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ i $d\Omega^2$ és una mètrica definida positiva sobre la superfície $\mathcal{S}_0$ d'equacions $r = r_0$, $t = t_0$, que té curvatura constant positiva ($\mathcal{S}_0$ és isomètrica a un tros d'esfera).

Abans de demostrar aquest teorema, però, haurem de preparar una mica el terreny. En primer lloc necessitem un resultat general de varietats de Riemann relatiu al que s'anomena aplicació exponencial (no la confongueu amb l'aplicació exponencial dels grups de Lie descrita a l'apartat 2) i que nosaltres donarem aquí convenientment adaptat a les varietats de Lorentz.

Sigui (M, g) una varietat de Lorentz, x un punt de M i $v \in T_x(M)$. Sigui $t \rightarrow z(t, x, v)$ la geodèsica que passa per x i té v com a vector tangent en aquest punt. Aquesta geodèsica (pel fet de ser solució de l'equació diferencial de les geodèsiques amb condicions inicials donades) està definida en principi per a $|t| < \varepsilon$. Si està definida per a $t = 1$, llavors $z(1, x, v)$ s'anomena exponencial geodèsica de v en el punt x i s'escriu $\exp_x v = z(1, x, v)$.

Proposició 19.7 *Sigui (M, g) una varietat de Lorentz. Per a cada $x_0 \in M$ existeix un entorn U de x_0 amb la propietat següent: per a cada $x \in U$ existeix un entorn W_x de l'origen a $T_x(M)$ de tal manera que l'aplicació*

$$\begin{aligned} T_x(M) \supset W_x &\longrightarrow M \\ v &\longrightarrow \exp_x v \end{aligned}$$

està definida, la imatge U_x de W_x per aquesta aplicació és un obert de M , aquesta aplicació dóna un difeomorfisme entre W_x i U_x , i, a més, $U \subset U_x$.

DEMOSTRACIÓ. Pel teorema d'existència i unicitat de solucions d'equacions diferencials ordinàries, donada una equació del tipus

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = F\left(z, \frac{dz}{dt}\right),$$

amb z de $\mathbf{R}^n$ i F una aplicació diferenciable de $\mathbf{R}^{2n}$ en $\mathbf{R}^n$, donat el punt $(x_0^1, \dots, x_0^n, 0 \dots 0)$ de $\mathbf{R}^{2n}$, existeix un entorn W d'aquest punt i un $\varepsilon > 0$ tals

que per a cada $(x, v) \in W$ l'equació diferencial anterior té una única solució $z(t, x, v)$ amb les condicions inicials $z(0, x, v) = y$, $\dot{z}(0, x, v) = v$, definida per a $|t| < \varepsilon$. A més, aquesta solució depèn diferenciablement de les condicions inicials (x, v) . Apliquem això a la nostra situació. Fixem, primer, $x_0 \in M$. Prenguem una carta local $(U, (x^1, x^2, x^3, x^4))$ de M amb $x_0 \in U$. L'equació de les geodèsiques en aquesta carta serà del tipus anterior. Sigui $V = \{(x, v) \in \mathbf{R}^8 \text{ tals que } (x, 2v/\varepsilon) \in W\}$. V serà un entorn de $(x_0, 0)$ a $\mathbf{R}^8$. Observem, ara, que si C és una constant qualsevol, $z(t, x, Cv) = z(Ct, x, v)$, ja que les dues corbes $t \rightarrow z(t, x, Cv)$ i $t \rightarrow (Ct, x, v)$ compleixen la mateixa equació diferencial amb les mateixes condicions inicials. Quan $(x, v) \in V$, $z(t, x, 2v/\varepsilon)$ estarà definida per a $|t| < \varepsilon$. Però $z(t, x, 2v/\varepsilon) = z(2t/\varepsilon, x, v)$. Fent $t = \varepsilon/2$, resultarà que $z(1, x, v)$ estarà definida. Per tant, l'aplicació

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^8 \supset V &\longrightarrow M \\ (x, v) &\longrightarrow \exp_x v \end{aligned}$$

està definida i és diferenciable. Sigui f l'aplicació

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow M \times M \\ (x, v) &\longrightarrow (x, \exp_x v) . \end{aligned}$$

Sigui f_* l'aplicació lineal tangent de f en el punt $(x_0, 0)$. A $U \times U \subset M \times M$ prenguem les coordenades $(x^1 \dots x^4, \tilde{x}^1 \dots \tilde{x}^4)$, on $\tilde{x}^1 \dots \tilde{x}^4$ és una segona còpia de $x^1 \dots x^4$. L'aplicació f funciona així:

$$(x^1 \dots x^4, v^1 \dots v^4) \longrightarrow (x^1 \dots x^4, z^1(1, x, v) \dots z^4(1, x, v)) .$$

Derivant la condició $z^i(t, x, v) = z^i(1, x, tv)$ respecte a t en el punt $t = 0$ s'obté immediatament que

$$\frac{\partial z^i(1, x, 0)}{\partial v^j} = \delta_{ij} .$$

Utilitzant aquest fet es pot veure immediatament que

$$\begin{aligned} f_*(\partial/\partial x^i) &= \partial/\partial x^i + \partial/\partial \tilde{x}^i \\ f_*(\partial/\partial v^i) &= \partial/\partial \tilde{x}^i . \end{aligned}$$

Per tant, f_* dóna un isomorfisme entre els espais tangents. Pel teorema de la funció inversa, existirà un entorn V' de $(x_0, 0)$ contingut a V sobre el qual f donarà un difeomorfisme entre V' i la seva imatge $f(V')$. Sigui V_1 un entorn

de x_0 a $\mathbf{R}^4$, i V_2 un entorn de l'origen a $\mathbf{R}^4$ tals que $V_1 \times V_2 \subset V'$. Sigui U un entorn de x_0 a M tal que $U \times U \subset f(V_1 \times V_2)$. Llavors aquest entorn U de x_0 compleix totes les condicions de la proposició. ■

Tornem ara al nostre problema. Suposem, com abans, que (M, g) és una varietat de Lorentz amb simetria esfèrica $SO(3) \times M \rightarrow M$. Fixem un punt qualsevol $x_0 \in M$ que no sigui fix per l'acció de $SO(3)$. L'òrbita $\mathcal{S}(x_0)$ d'aquest punt és una subvarietat espacial de dimensió 2 de M . $SO(3)$ actua sobre $\mathcal{S}(x_0)$ ja que si $y \in \mathcal{S}(x_0)$ existeix $\beta \in SO(3)$ amb $y = \beta(x_0)$. Llavors $\alpha(y) = \alpha\beta(x_0) \in \mathcal{S}(x_0)$. L'acció de $SO(3)$ sobre $\mathcal{S}(x_0)$ és transitiva en virtut de la definició mateixa de $\mathcal{S}(x_0)$. Sigui I_{x_0} el subgrup d'isotropia del punt x_0 . $SO(3)$ és un grup de Lie de dimensió 3 (ja que el seu espai tangent a l'element neutre es pot identificar amb el conjunt de matrius 3×3 antisimètriques). En virtut de la proposició 19.3, I_{x_0} és una subvarietat diferenciable de $SO(3)$. Per les proposicions 19.4 i 19.5, $\mathcal{S}(x_0) \cong SO(3)/I_{x_0}$. Com que $\mathcal{S}(x_0)$ té dimensió 2, I_{x_0} haurà de tenir dimensió 1. El nostre objectiu és veure que I_{x_0} és un grup de Lie isomorf a $SO(2)$. Abans, però, necessitem el resultat següent.

Lema 19.8 *Sigui $\{\varphi_t\}$ un subgrup uniparamètric de transformacions de $SO(3)$ i e l'element neutre de $SO(3)$. Llavors $\{\varphi_t(e)\}$ és un subgrup de $SO(3)$ de rotacions. Dit d'una manera més precisa, si pensem els elements de $SO(3)$ com a transformacions de $\mathbf{R}^3$ que conserven el producte escalar i l'orientació usuals, es pot escollir una base ortonormal i positiva de $\mathbf{R}^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$, de manera que, per a tot $t \in \mathbf{R}$, $\varphi_t(e)$ sigui la transformació que en aquesta base té com a matriu*

$$\varphi_t(e) = \begin{pmatrix} \cos kt & -\sin kt & 0 \\ \sin kt & \cos kt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on k és una constant.

DEMOSTRACIÓ. Com que en tot grup de Lie G l'aplicació exponencial dona un difeomorfisme d'un entorn de l'origen a $T_e(G)$ sobre un entorn U de e a G , existirà un entorn U de e a $SO(3)$ tal que per a tot $\alpha \in U$ existeix un únic grup uniparamètric $\{\psi_\tau\}$ amb les condicions $\psi_0(e) = e$ i $\psi_1(e) = \alpha$. Escollim un $t_0 > 0$ tal que $\varphi_{t_0}(e) \in U$. Anomenem α l'element $\varphi_{t_0}(e)$. Vegem en primer lloc que si considerem α com a transformació lineal de $\mathbf{R}^3$, admet un vector propi de valor propi 1 (això ho compleixen tots els $\alpha \in SO(3)$). En efecte, sigui $P(X) = \det(\alpha - XI)$ el polinomi característic de α . Totes les arrels reals de $P(X)$ són valors propis de α . Però com que α és de $SO(3)$, el valor absolut dels seus valors propis ha de ser 1. Com que $P(X)$ és un polinomi de grau 3, tindrà almenys una arrel real. Si les tres arrels de $P(X)$ fossin reals, n'hi

hauria d'haver una que fos 1, ja que si les tres fossin -1 , el determinant de α (producte dels tres valors propis) seria -1 , en contra de la hipòtesi que α és de $SO(3)$. En aquest cas veiem, doncs, que 1 és valor propi de α . Com que les arrels complexes de $P(X)$ han d'anar aparellades cada una amb la seva conjugada, $P(X)$ no pot tenir dues arrels reals i una de complexa. Veurem ara que si $P(X)$ té només una arrel real, aquesta ha de ser 1. En efecte, si x, λ i $\bar{\lambda}$ són aquestes arrels, el producte de les tres, $x |\lambda|$, que és el determinant, ha de ser 1. D'aquí es dedueix que x ha de ser positiu, i, per tant, 1. Hem vist, doncs, que existeix un vector propi de α de valor propi 1. Sigui e_3 un tal vector propi que, a més, tingui norma 1. Completem-lo amb dos altres vectors e_1, e_2 de manera que $\{e_1, e_2, e_3\}$ sigui una base ortonormal positiva de $\mathbf{R}^3$. Com que α és una isometria de $\mathbf{R}^3$ i deixa e_3 invariant, deixarà invariant el complement ortogonal de e_3 que és l'espai engendrat per e_1 i e_2 . Així doncs, la matriu de α en aquesta base serà de la forma

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

amb a, b, c, d formant una matriu de $SO(2)$, o sigui, de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \rho & -\sin \rho \\ \sin \rho & \cos \rho \end{pmatrix}$$

per a un cert ρ . Si posem

$$\psi_\tau(e) = \begin{pmatrix} \cos \tau \rho & -\sin \tau \rho & 0 \\ \sin \tau \rho & \cos \tau \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tindrem que $\psi_\tau(e)$ és un subgrup uniparamètric amb $\psi_0(e) = e$ i $\psi_1(e) = \alpha$. A més, $\varphi_{\tau t_0}(e)$ compleix les mateixes condicions, ja que quan $\tau = 1$, $\varphi_{t_0}(e) = \alpha$. Com que $\alpha \in U$, això implica (per la unicitat dels grups uniparamètrics) que $\varphi_{\tau t_0}(e) = \psi_\tau(e)$, per a tot τ que compleixi $0 \leq \tau \leq 1$. Però si dos subgrups uniparamètrics coincideixen per a $0 \leq \tau \leq 1$, coincideixen per a tot τ per la condició de subgrup. Per tant, si designem per t l'element τt_0 tindrem $\varphi_t(e) = \psi_{t/t_0}(e)$, com volíem veure. ■

Proposició 19.9 *Sigui H un subgrup de $SO(3)$, tancat i de dimensió 1. Si-gui H_0 la component connexa de H que conté la identitat. Llavors, o bé H és connex i $H = H_0$, o bé H té dues components connexes H_0 i H_1 . Si pensem els*

elements de $SO(3)$ com a transformacions de $\mathbf{R}^3$, es pot trobar una base ortonormal positiva de $\mathbf{R}^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$, tal que H_0 és el conjunt de transformacions de $\mathbf{R}^3$ que en aquesta base s'expressen per matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i H_1 , si existeix, és el conjunt de transformacions que s'expressen per matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ \sin t & -\cos t & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓ. De la proposició 19.3, H és un grup de Lie de dimensió 1. La seva àlgebra de Lie serà isomorfa a $\mathbf{R}$. Considerem l'aplicació exponencial, $\exp: \mathbf{R} \rightarrow H \subset SO(3)$. Si per a cada $a \in SO(3)$ i cada $t \in \mathbf{R}$ definim $\psi_t(a) = a \cdot \exp(t)$, tindrem un grup uniparamètric de transformacions de $SO(3)$, ja que $\psi_t(\psi_s(a)) = \psi_t(a \cdot \exp(s)) = a \cdot \exp(s) \cdot \exp(t) = a \cdot \exp(t+s) = \psi_{t+s}(a)$.

Pel lema 19.8 podem escollir una base de $\mathbf{R}^3$ ortonormal i positiva $\{e_1, e_2, e_3\}$, de manera que, per a tot $t' \in \mathbf{R}$, $\psi_{t'}(e)$ sigui la transformació que en aquesta base té com a matriu

$$\exp(t') = \psi_{t'}(e) = \begin{pmatrix} \cos Kt' & -\sin Kt' & 0 \\ \sin Kt' & \cos Kt' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on K és una constant. Fem el canvi de paràmetre $t = Kt'$ i anomenem $\varphi_t(e)$ l'element $\psi_{t/K}(e)$. Com que l'aplicació $\mathbf{R} \rightarrow H \subset SO(3)$ donada per $t \rightarrow \varphi_t(e)$ és diferenciable, serà contínua i la imatge haurà de ser H_0 . O sigui, $H_0 = \{\varphi_t(e) \mid t \in \mathbf{R}\} \cong SO(2)$. Si H és connex llavors $H = H_0$ i la proposició queda demostrada. Suposem H no connex. Prenguem $\beta \in H, \beta \notin H_0$. El morfisme $H \rightarrow H$ donat per $\alpha \rightarrow \beta\alpha\beta^{-1}$ aplicarà H_0 en H_0 i donarà un automorfisme de H_0 . Com que $H_0 \cong SO(2) \cong S^1$ i com que només existeixen dos automorfismes de S^1 , que són la identitat i l'automorfisme $\alpha \rightarrow \alpha^{-1}$, tindrem que o bé $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha$ per a tot $\alpha \in H_0$, o bé $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1}$ per a tot $\alpha \in H_0$. És a dir, o bé $\alpha\beta = \beta\alpha$, o bé $\alpha^{-1}\beta = \beta\alpha \forall \alpha \in H_0$. β i α seran matrius de la forma

$$\beta = \begin{pmatrix} P & Q & R \\ S & T & U \\ V & X & Y \end{pmatrix} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\beta\alpha$ serà una matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & R \\ \bullet & \bullet & U \\ V \cos t + X \sin t & -V \sin t + X \cos t & Y \end{pmatrix},$$

on els punts indiquen elements la forma dels quals no ens interessa. $\alpha\beta$ i $\alpha^{-1}\beta$ seran de la forma

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & R \cos t - \varepsilon U \sin t \\ \bullet & \bullet & \varepsilon R \sin t + U \cos t \\ V & X & Y \end{pmatrix}$$

amb $\varepsilon = \pm 1$. Quan $\varepsilon = 1$ la matriu anterior correspon a $\alpha\beta$ i quan $\varepsilon = -1$ correspon a $\alpha^{-1}\beta$. Igualant amb $\beta\alpha$, queda

$$\begin{cases} R(\cos t - 1) - \varepsilon U \sin t = 0 \\ \varepsilon R \sin t + U(\cos t - 1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V(\cos t - 1) + X \sin t = 0 \\ -V \sin t + X(\cos t - 1) = 0 \end{cases}.$$

Si pensem R, U, V i X com a incògnites, els dos sistemes anteriors tenen determinant $2(1 - \cos t)$. Quan t no és múltiple enter de 2π el determinant no s'anul·la i R, U, V i X hauran de ser 0. Per tant, β haurà de ser de la forma

$$\beta = \begin{pmatrix} P & Q & 0 \\ S & T & 0 \\ 0 & 0 & Y \end{pmatrix}.$$

Així doncs, β deixa invariant el subespai $\langle e_3 \rangle$ de $\mathbf{R}^3$. Com que $\beta \in SO(3)$, $\beta(e_3) = \pm e_3$. Si $\beta(e_3) = e_3$ llavors $Y = 1$ i la matriu

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ S & T \end{pmatrix}$$

haurà de tenir determinant 1 i haurà de ser de $SO(2)$. Llavors β serà de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i, per tant, serà de H_0 en contra de la hipòtesi. L'única possibilitat que queda és $\beta(e_3) = -e_3$, $Y = -1$. Llavors la matriu

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ S & T \end{pmatrix}$$

haurà de ser de $O(2)$ amb determinant -1 . Per tant, β serà de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ \sin t & -\cos t & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sigui H_1 el conjunt de matrius de la forma anterior. Observem que quan H no és connex $H_1 \subset H$ ja que en aquest cas, com hem vist, existeix una matriu $\beta \in H$ que és de la forma anterior per a un valor $t = t_0$ del paràmetre. Llavors els productes

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t_0 & \sin t_0 & 0 \\ \sin t_0 & -\cos t_0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que són de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos(t+t_0) & \sin(t+t_0) & 0 \\ \sin(t+t_0) & -\cos(t+t_0) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

seran de H , i així s'obtenen totes les matrius de H_1 . Resumint, hem vist que quan H no és connex llavors $H_1 \subset H$ i tot $\beta \in H$ que no és de H_0 és de H_1 . ■

Sigui com sempre (M, g) una varietat de Lorentz amb simetria esfèrica, $SO(3) \times M \rightarrow M$. Sigui x_0 un punt de M no fix per l'acció de $SO(3)$. Hem vist abans que $SO(3)$ actua transitivament sobre l'òrbita $\mathcal{S}(x_0)$, $SO(3) \times \mathcal{S}(x_0) \rightarrow \mathcal{S}(x_0)$. Si I_{x_0} és el grup d'isotropia de x_0 i $\alpha \in I_{x_0}$, α transforma corbes de $\mathcal{S}(x_0)$ que surten de x_0 en corbes de $\mathcal{S}(x_0)$ que surten de x_0 . Per tant, l'aplicació lineal tangent de α en el punt x_0 , $(d\alpha)_{x_0}$, transforma $T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))$ en $T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))$. Així doncs, I_{x_0} actua sobre l'espai vectorial $T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))$,

$$I_{x_0} \times T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0)) \longrightarrow T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0)).$$

Designem per $\text{Iso}(T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0)))$ el grup d'isometries de l'espai vectorial $T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))$ respecte a la mètrica g (que és definida positiva sobre $T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))$). Aquest grup d'isometries serà isomorf a $O(2)$. Elegida una orientació de $T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))$, designem per $\text{Rot}(T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0)))$ el subgrup de $\text{Iso}(T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0)))$ format per les isometries que conserven l'orientació (subgrup que no depèn de l'orientació elegida). $\text{Rot}(T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))) \cong SO(2)$. Considerem el morfisme

$$\begin{array}{ccc} I_{x_0} & \longrightarrow & \text{Iso}(T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))) \\ \alpha & \longrightarrow & (d\alpha)_{x_0} \end{array}.$$

La imatge d'aquest morfisme s'anomena *grup lineal d'isotropia* del punt x_0 .

Proposició 19.10 I_{x_0} és isomorf al grup lineal d'isotropia. Aquest serà o bé $\text{Rot}(T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0)))$, quan I_{x_0} és connex, o bé $\text{Iso}(T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0)))$, quan I_{x_0} no és connex.

DEMOSTRACIÓ. Considerem el morfisme de I_{x_0} a $\text{Iso}(T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0)))$ donat per $\alpha \rightarrow (d\alpha)_{x_0}$. Provem que és injectiu. Tot $\alpha \in I_{x_0}$ és una isometria de la varietat de Riemann $(\mathcal{S}(x_0), g)$. Per tant, transforma geodèsiques que surten de x_0 en geodèsiques que surten de x_0 . Si $(d\alpha)_{x_0}$ és la identitat, α serà la identitat en un petit entorn de x_0 a $\mathcal{S}(x_0)$ (ja que haurà de transformar tota petita geodèsica que surti de x_0 en ella mateixa). Provem que això implica que α és l'element neutre de $SO(3)$. En efecte, si $x \neq x_0$ amb $\alpha x = x$ (x pròxim a x_0), com que $\mathcal{S}(x_0) \cong SO(3)/I_{x_0}$ (per les proposicions 19.4 i 19.5) i l'actuació de $SO(3)$ sobre $\mathcal{S}(x_0)$ (a través d'aquest isomorfisme) és la mateixa que l'actuació natural de $SO(3)$ sobre $SO(3)/I_{x_0}$,

$$\begin{aligned} SO(3) \times SO(3)/I_{x_0} &\longrightarrow SO(3)/I_{x_0} \\ (a, bI_{x_0}) &\longrightarrow abI_{x_0}, \end{aligned}$$

l'element $x \in \mathcal{S}(x_0)$ correspondrà a un element $bI_{x_0} \in SO(3)/I_{x_0}$. La condició $x \neq x_0$ s'escriurà $b \notin I_{x_0}$. La condició $\alpha x = x$ s'escriurà $abI_{x_0} = bI_{x_0}$. O sigui, $b^{-1}abI_{x_0} = I_{x_0}$. O sigui, $b^{-1}abh \in I_{x_0}$ per a tot $h \in I_{x_0}$. Multiplicant per h^{-1} a la dreta, $b^{-1}ab \in I_{x_0}$. Per tant, existeix $\alpha' \in I_{x_0}$ tal que $b^{-1}ab = \alpha'$. O sigui, $ab = b\alpha'$. Com que α i α' són de I_{x_0} existeix una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ en què α i α' s'expressen per matrius de la forma següent (proposició 19.9):

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos t & -\varepsilon \sin t & 0 \\ \sin t & \varepsilon \cos t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \alpha' = \begin{pmatrix} \cos t' & -\varepsilon' \sin t' & 0 \\ \sin t' & \varepsilon' \cos t' & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon' \end{pmatrix},$$

amb $\varepsilon = \pm 1$ i $\varepsilon' = \pm 1$. Posem

$$b = \begin{pmatrix} P & Q & R \\ S & T & U \\ V & X & Y \end{pmatrix}.$$

Llavors ab i $b\alpha'$ seran de la forma següent:

$$ab = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & R \cos t - \varepsilon U \sin t \\ \bullet & \bullet & R \sin t + \varepsilon U \cos t \\ \bullet & \bullet & \varepsilon Y \end{pmatrix} \quad b\alpha' = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \varepsilon' R \\ \bullet & \bullet & \varepsilon' U \\ \bullet & \bullet & \varepsilon' Y \end{pmatrix}.$$

Si agafem un b amb la component $Y \neq 0$, igualant αb amb $b\alpha'$ obtenim $\varepsilon = \varepsilon'$ i

$$\begin{cases} R(\cos t - \varepsilon) - \varepsilon U \sin t = 0 \\ R \sin t + \varepsilon U(\cos t - 1) = 0 . \end{cases}$$

Com que això s'ha de complir per a tot parell (R, U) pròxim a $(0, 0)$, els coeficients s'han d'anul·lar tots. Per tant, $\sin t = 0$, $\cos t = 1$ i $\varepsilon = 1$, d'on α és l'element neutre. Això prova que l'aplicació $\alpha \rightarrow (d\alpha)_{x_0}$ és injectiva. La imatge d'aquest morfisme és (per definició) el grup lineal d'isotropia de x_0 . Anomenem G aquesta imatge. És fàcil veure que el morfisme $\alpha \rightarrow (d\alpha)_{x_0}$ és diferenciable (morfisme de grups de Lie). G serà doncs un subgrup de Lie de dimensió 1 de $\text{Iso}(T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))) \cong O(2)$. Pot ser, doncs, o bé tot $\text{Iso}(T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0)))$ o bé $\text{Rot}(T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))) \cong SO(2)$. Quan I_{x_0} sigui connex, G haurà de ser connex i, per tant, isomorf a $SO(2)$. ■

Posem ara un exemple on el grup d'isotropia I_{x_0} de qualsevol punt x_0 no sigui connex i sigui isomorf, per tant, a $O(2)$. Sigui P_2 l'espai projectiu real de dimensió 2. P_2 pot ser construït com l'espai quocient de l'esfera unitat S^2 de $\mathbf{R}^3$ per la relació d'equivalència que identifica els punts diametralment oposats. $SO(3)$ actua de manera natural sobre S^2 . Ara bé, si $\alpha \in SO(3)$ i v és un vector de $\mathbf{R}^3$ de norma 1, $\alpha(v)$ i $\alpha(-v)$ són diametralment oposats. Això ens diu que l'acció de $SO(3)$ sobre S^2 passa al quocient i dóna lloc a una acció

$$SO(3) \times P_2 \longrightarrow P_2 .$$

D'altra banda, quan identifiquem $T_v(S^2)$ amb $T_{-v}(S^2)$ per mitjà de la simetria $w \rightarrow -w$, si g és la mètrica de Riemann sobre S^2 obtinguda per restricció de la mètrica euclidiana de $\mathbf{R}^3$, tindrem $g(w_1, w_2) = g(-w_1, -w_2)$. Per tant, g dóna lloc a una mètrica de Riemann sobre P_2 que continuarem designant per g . Considerem la varietat producte $M = P_2 \times \mathbf{R}^2$ amb la mètrica producte $g \times g'$, on g' és la mètrica de Minkowski usual de $\mathbf{R}^2$. M amb aquesta mètrica és una varietat de Lorentz. Definim una acció de $SO(3)$ sobre M per

$$\begin{aligned} SO(3) \times (P_2 \times \mathbf{R}^2) &\longrightarrow P_2 \times \mathbf{R}^2 \\ (\alpha, (x, y)) &\longrightarrow (\alpha(x), y) , \end{aligned}$$

on $\alpha(x)$ indica l'acció de $SO(3)$ sobre P_2 definida abans. M amb aquesta acció té simetria esfèrica i el grup d'isotropia de qualsevol punt és $O(2)$.

Observació. Aquest exemple s'aparta una mica de la intuïció que tenim de "simetria esfèrica" ja que sempre ens imaginem que l'òrbita de qualsevol punt

no fix és una esfera i que el grup d'isotropia és $SO(2)$. Per evitar exemples com aquest, a la definició de "simetria esfèrica" potser hauríem d'haver exigít que el grup d'isotropia I_x de qualsevol punt x no fix per l'acció de $SO(3)$ fos connex. De totes maneres, no modificarem la definició que hem donat ja que qualsevol varietat que tingui simetria esfèrica d'acord amb la intuïció, té simetria esfèrica d'acord amb la nostra definició. A més, els resultats que volem obtenir es desprenen de qualsevol de les dues definicions possibles.

Proposició 19.11 *Sigui (M, g) una varietat de Lorentz amb simetria esfèrica, $SO(3) \times M \rightarrow M$. Sigui x_0 un punt de M no fix per l'acció de $SO(3)$. Sigui $\mathcal{S}(x_0)$ l'òrbita de x_0 per aquesta acció, dotada de la mètrica obtinguda per restricció de la mètrica g de M . Sigui I_{x_0} el grup d'isotropia de x_0 . Sigui S^2 l'esfera unitat de $\mathbf{R}^3$ amb la seva mètrica usual que designarem aquí per $\tilde{g}$. Sigui P_2 l'espai projectiu de dimensió 2 construït a partir de S^2 identificant punts diametralment oposats, dotat de la mètrica induïda per $\tilde{g}$ (mètrica que continuarem designant per $\tilde{g}$). Si I_{x_0} és connex, llavors existeix un difeomorfisme $f: \mathcal{S}(x_0) \rightarrow S^2$ que compleix $f^*(\tilde{g}) = kg$, on k és una constant positiva. Si I_{x_0} no és connex, llavors existeix un difeomorfisme $f: \mathcal{S}(x_0) \rightarrow P_2$ amb la mateixa propietat, $f^*(\tilde{g}) = kg$, $k > 0$.*

DEMOSTRACIÓ. Situem-nos, en primer lloc, en la hipòtesi que I_{x_0} és connex. Escollim una base ortonormal i positiva de $\mathbf{R}^3$, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, de manera que I_{x_0} sigui expressat per matrius que en aquesta base tinguin la forma

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(proposició 19.9). Definim ara $f: \mathcal{S}(x_0) \rightarrow S^2 \subset \mathbf{R}^3$ de la manera següent. Si $x \in \mathcal{S}(x_0)$, existeix $\alpha \in SO(3)$ tal que $x = \alpha(x_0)$. Definim $f(x) = \alpha(\vec{e}_3)$. Observem que la definició de f no depèn del $\alpha \in SO(3)$ elegit tal que $x = \alpha(x_0)$. En efecte, si $\alpha' \in SO(3)$ amb $\alpha(x_0) = \alpha'(x_0)$, llavors $\alpha^{-1}\alpha' \in I_{x_0}$. Per tant, $\alpha^{-1}\alpha'(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$, ja que els elements de I_{x_0} són representats per matrius de la forma anterior. Pel mateix procediment, és fàcil construir l'aplicació inversa de f , $f^{-1}: S^2 \rightarrow \mathcal{S}(x_0)$.

Provem ara que si $\beta \in SO(3)$ llavors $f(\beta(x)) = \beta(f(x)) \forall x \in \mathcal{S}(x_0)$. En efecte, si $x = \alpha(x_0)$ amb $\alpha \in SO(3)$, tindrem $\beta x = \beta\alpha(x_0)$, $f(\beta x) = f(\beta\alpha(x_0)) = \beta\alpha(\vec{e}_3)$. D'altra banda, $\beta(f(x)) = \beta(f(\alpha(x_0))) = \beta\alpha(\vec{e}_3)$. De la propietat que acabem de demostrar es dedueix que si $\beta \in I_{x_0}$, llavors l'aplicació lineal tangent de f en el punt x_0 , $(df)_{x_0}$, complirà $(df)_{x_0} \circ (d\beta)_{x_0} = (d\beta)_{e_3} \circ (df)_{x_0}$. Això té com a conseqüència que vectors de $T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))$ d'igual norma

s'apliquen per df en vectors de $T_{e_3}(S^2)$ d'igual norma, malgrat que la norma que tenien a $T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))$ pot no ser la mateixa que la de les seves imatges a $T_{e_3}(S^2)$. En efecte, si v i w són vectors de $T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))$ d'igual norma, com que I_{x_0} actua sobre $T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))$ com el grup de rotacions $\text{Rot}(T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0)))$ (proposició 19.10), existeix sempre $\beta \in I_{x_0}$ tal que $(d\beta)_{x_0}v = w$. Llavors $\tilde{g}((df)w, (df)w) = \tilde{g}((df)(d\beta)v, (df)(d\beta)v) = \tilde{g}((d\beta)(df)v, (d\beta)(df)v) = (\text{pel fet que } \beta \text{ és isometria de } S^2) = \tilde{g}((df)v, (df)v)$. D'aquí deduíem que existeix una constant positiva k tal que per a qualsevol parell de vectors v, w de $T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))$ compleix $\tilde{g}((df)v, (df)w) = kg(v, w)$. Provem que la mateixa propietat es compleix per a qualsevol parell de vectors tangents en qualsevol altre punt x de $\mathcal{S}(x_0)$ diferent de x_0 , amb la mateixa constant k . Si $v, w \in T_x(\mathcal{S}(x_0))$ amb $x \in \mathcal{S}(x_0)$, sigui $\alpha \in SO(3)$ amb $x = \alpha(x_0)$. Com que α actua sobre $\mathcal{S}(x_0)$ com una isometria i sobre S^2 també, tindrem

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{f(x)}((df)v, (df)w) &= \tilde{g}_{f(x_0)}((d\alpha^{-1})(df)v, (d\alpha^{-1})(df)w) = \\ &= \tilde{g}_{f(x_0)}((df)(d\alpha^{-1})v, (df)(d\alpha^{-1})w) = \\ &= kg_{x_0}((d\alpha^{-1})v, (d\alpha^{-1})w) = kg_x(v, w) . \end{aligned}$$

Això prova la proposició en el cas que I_{x_0} és connex.

Suposem ara que I_{x_0} no és connex. Llavors, d'acord amb la proposició 19.9, només tindrà dues components connexes. Elegim una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ de tal manera que I_{x_0} sigui expressat en aquesta base per matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\varepsilon \sin t & 0 \\ \sin t & \varepsilon \cos t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

amb $\varepsilon = \pm 1$. Definim ara $f: \mathcal{S}(x_0) \rightarrow P_2$ de la manera següent. Siguí $x \in \mathcal{S}(x_0)$. Siguí $\alpha \in SO(3)$ tal que $x = \alpha x_0$. Definim $f(x) = \text{classe de } \alpha(\vec{e}_3) \text{ a } P_2 = S^2 / \sim$. Si α' és un altre element de $SO(3)$ tal que $x = \alpha' x_0$, llavors $\alpha^{-1}\alpha' \in I_{x_0}$ i, per tant, serà una matriu de la forma anterior. Veiem, doncs, que $\alpha^{-1}\alpha'(\vec{e}_3) = \varepsilon \vec{e}_3$. O sigui, classe de $\alpha'(\vec{e}_3) = \text{classe de } \alpha(\vec{e}_3)$. Això prova que f està ben definida. La demostració continua, llavors, com en el cas anterior. ■

Siguí, com sempre, (M, g) una varietat de Lorentz amb simetria esfèrica $SO(3) \times M \rightarrow M$. Siguí x_0 un punt no fix per l'acció de $SO(3)$. Designem per $\mathcal{C}(x_0)$ el conjunt de punts de M format per totes les geodèsiques que surten de x_0 amb vector tangent ortogonal a $T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))$. En virtut de la proposició 19.7 existirà un entorn U de x_0 tal que per a tot $y \in U$, $U \cap \mathcal{C}(y)$ és una subvarietat de M , ja que amb les notacions d'aquella proposició, $U \cap \mathcal{C}(y) =$

$U \cap \exp_y (T_y(\mathcal{S}(y))^\perp \cap W_y)$, i $\exp_y$ és un difeomorfisme sobre W_y (la imatge d'una subvarietat per un difeomorfisme és una subvarietat!).

Proposició 19.12 *Sigui (M, g) una varietat de Lorentz amb simetria esfèrica, $SO(3) \times M \rightarrow M$. Sigui $x \in M$ no fix per l'acció de $SO(3)$. Sigui U un entorn de x tal que no contingui cap punt fix i que $U \cap \mathcal{C}(y)$ sigui una subvarietat de M per a tot $y \in U$. Si $y \in U \cap \mathcal{C}(x)$, llavors $T_y(\mathcal{S}(y))$ és ortogonal a $T_y(\mathcal{C}(x))$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui H_x la component connexa de la identitat del grup d'isotropia I_x de x . Com que els elements de H_x són isometries de $T_x(M)$ que transformen $T_x(\mathcal{S}(x))$ en $T_x(\mathcal{S}(x))$, hauran de transformar el seu complement ortogonal $T_x(\mathcal{C}(x))$ en ell mateix. Com que són isometries, transformen geodèsiques en geodèsiques. Per tant, H_x haurà de transformar el conjunt $\mathcal{C}(x)$ en ell mateix. Ara veurem que H_x deixa fixos tots els punts de $\mathcal{C}(x)$. Com que $\mathcal{C}(x)$ i $\mathcal{S}(x)$ són, en un entorn convenient de x , dues subvarietats diferenciables transverses (això és, $T_x(\mathcal{S}(x)) \oplus T_x(\mathcal{C}(x)) = T_x(M)$), existirà un entorn V de x a $\mathcal{C}(x) \cap U$ tal que $\mathcal{C}(x)$ i $\mathcal{S}(y)$ seran encara transverses per a tot $y \in V$. Sigui y un punt qualsevol de V . Veurem que H_x ha de deixar fix y . En efecte, H_x és un grup uniparamètric (de rotacions), $H_x = \{\varphi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$. Com que $y \in \mathcal{C}(x) \cap \mathcal{S}(y)$ i H_x deixa invariant $\mathcal{C}(x)$ i $\mathcal{S}(y)$, $\varphi_t(y)$ ha de ser una corba continguda a la vegada a $\mathcal{C}(x)$ i a $\mathcal{S}(y)$. Per tant, el seu vector tangent $\dot{\varphi}_0(y)$ ha de ser nul pel fet d'estar contingut a la intersecció $T_y(\mathcal{C}(x)) \cap T_y(\mathcal{S}(y))$. Com que això es compleix per a tot $y \in V$, φ_t engendra el camp vectorial nul sobre V . Per tant φ_t ha d'actuar sobre V deixant fixos tots els punts. D'aquí deduïm que H_x actua sobre l'espai tangent $T_x(\mathcal{C}(x))$ com la identitat. Com que H_x transforma geodèsiques en geodèsiques, per la definició mateixa de $\mathcal{C}(x)$ haurà de deixar fixos tots els punts de $\mathcal{C}(x)$.

Vegem ara que si $y \in U \cap \mathcal{C}(x)$, llavors $T_y(\mathcal{S}(y))$ és ortogonal a $T_y(\mathcal{C}(x))$. Prenguem $v \in T_y(\mathcal{S}(y))$ i $w \in T_y(\mathcal{C}(x))$. Tindrem

$$g(v, w) = g(\varphi_t(v), \varphi_t(w)) = g(\varphi_t(v), w).$$

Derivant respecte a t per a $t = 0$, tindrem $0 = g(\dot{\varphi}_0(v), w)$. Ara bé, com que $H_x \subset H_y$ (ja que els elements de H_x deixen fix y) i com que H_y actua sobre $T_y(\mathcal{S}(y))$ com el grup de rotacions d'aquest espai (proposició 19.10), $\dot{\varphi}_0(v)$ és un vector de $T_y(\mathcal{S}(y))$ perpendicular a v . Quan v recorre tots els vectors de $T_y(\mathcal{S}(y))$, $\dot{\varphi}_0(v)$ recorrerà, per tant, tots els vectors de $T_y(\mathcal{S}(y))$. Així doncs, la igualtat $0 = g(\dot{\varphi}_0(v), w)$ ens assegura que w és perpendicular a l'espai $T_y(\mathcal{S}(y))$. ■

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 19.6. Sigui (M, g) una varietat de Lorentz amb simetria esfèrica, $SO(3) \times M \rightarrow M$. Sigui x_0 un punt de M no fix per l'acció

de $SO(3)$. Sigui U' un entorn de x_0 tal que no contingui cap punt fix i que $U' \cap \mathcal{C}(y)$ sigui una subvarietat de M per a tot $y \in U'$. Considerem, a U' , les dues distribucions següents: $y \rightarrow T_y(\mathcal{S}(y))$ i $y \rightarrow T_y(\mathcal{S}(y))^\perp$. La primera distribució és òbviament involutiva, ja que les diferents òrbites $\mathcal{S}(x)$ que tallen U' són subvarietats integrals. La segona distribució també és involutiva ja que, per la proposició 19.12, per a cada $x \in U'$ la subvarietat $\mathcal{C}(x) \cap U'$ és subvarietat integral. Pel teorema 19.2 podem trobar un entorn U de x_0 que és domini d'una carta local cúbica $(U, r, t, \theta, \varphi)$ de tal manera que, a U , les subvarietats $r = \text{constant}$, $t = \text{constant}$, són òrbites $\mathcal{S}(x)$, mentre que les subvarietats $\theta = \text{constant}$, $\varphi = \text{constant}$, són subvarietats $\mathcal{C}(x)$. Fixats r i t , considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} f: \mathcal{S}(r, t, \theta_0, \varphi_0) &\longrightarrow \mathcal{S}(x_0) \\ (r, t, \theta, \varphi) &\longrightarrow (r_0, t_0, \theta, \varphi), \end{aligned}$$

on $\mathcal{S}(r, t, \theta_0, \varphi_0)$ indica la intersecció amb U de l'òrbita $\mathcal{S}$ que passa pel punt $(r, t, \theta_0, \varphi_0)$ i $\mathcal{S}(x_0)$, per abús de llenguatge, designa la intersecció amb U de l'òrbita $\mathcal{S}$ que passa per $x_0 = (r_0, t_0, \theta_0, \varphi_0)$. Provarem, en primer lloc, que f és una aplicació conforme. O sigui, que si g és la mètrica, existeix una constant positiva k tal que $f^*(g) = kg$. Abans, però, haurem de veure que f commuta amb qualsevol α de $SO(3)$.

Sigui $\alpha \in SO(3)$. Sigui $x' = \alpha x \in \mathcal{S}(x)$. Provem que α transforma $\mathcal{C}(x)$ en $\mathcal{C}(x')$. En efecte, com que α actua com una isometria de (M, g) , transforma geodèsiques que surten de x perpendiculars a $T_x(\mathcal{S}(x))$ en geodèsiques que surten de x' perpendiculars a $T_{x'}(\mathcal{S}(x'))$. D'aquí es dedueix que l'expressió de α en la carta local $(U, r, t, \theta, \varphi)$ és de la forma següent: $(r, t, \theta, \varphi) \rightarrow (r, t, \theta'(\theta, \varphi), \varphi'(\theta, \varphi))$. D'aquí i de l'expressió de f es dedueix que f commuta amb tots els α de $SO(3)$, $f \circ \alpha = \alpha \circ f$, allà on els dos membres estiguin definits (que no se surtin de U).

D'altra banda, a la demostració de la proposició 19.12 hem vist que la component connexa de la identitat, H_{x_0} , del grup d'isotropia I_{x_0} deixa fixos tots els punts de $\mathcal{C}(x_0)$; o sigui, coincideix amb el grup d'isotropia de tots els punts de $\mathcal{C}(x_0)$. O sigui, $H_{(r_0, t_0, \theta_0, \varphi_0)} = H_{(r, t, \theta_0, \varphi_0)}$. Això té com a conseqüència que dos vectors d'igual longitud v i w de $T_{(r, t, \theta_0, \varphi_0)}(\mathcal{S}(r, t, \theta_0, \varphi_0))$ s'apliquen per df en dos vectors d'igual longitud de $T_{x_0}(\mathcal{S}(x_0))$. En efecte, si v i w són d'igual longitud existeix $\alpha \in H_{(r, t, \theta_0, \varphi_0)} = H_{x_0}$ tal que $w = (d\alpha)v$. Llavors $g((df)w, (df)w) = g((df)(d\alpha)v, (df)(d\alpha)v) = g((d\alpha)(df)v, (d\alpha)(df)v) = g((df)v, (df)v)$. Per tant, existirà una constant positiva k tal que per a qualsevol parell de vectors v i w de l'espai tangent $T_{(r, t, \theta_0, \varphi_0)}(\mathcal{S}(r, t, \theta_0, \varphi_0))$ es tingui $g((df)v, (df)w) = kg(v, w)$. Per veure que això es compleix per a qualsevol pa-

rell v, w de vectors tangents en qualsevol altre punt (r, t, θ, φ) de $\mathcal{S}(r, t, \theta_0, \varphi_0)$, basta observar que es pot passar de (r, t, θ, φ) a $(r_0, t_0, \theta, \varphi)$ de la manera següent:

$$(r, t, \theta, \varphi) \longrightarrow (r, t, \theta_0, \varphi_0) \longrightarrow (r_0, t_0, \theta_0, \varphi_0) \longrightarrow (r_0, t_0, \theta, \varphi) .$$

La primera aplicació ve donada per una $\alpha \in SO(3)$ que és isometria. La segona és la que hem provat que és conforme en el punt $(r, t, \theta_0, \varphi_0)$. La tercera és α^{-1} , que és isometria. Això prova que l'aplicació f és conforme en tots els punts de $\mathcal{S}(r, t, \theta_0, \varphi_0)$ (amb la mateixa constant k).

La mètrica g , amb les coordenades (r, t, θ, φ) , s'expressarà

$$g = g_1 + g_2 ,$$

amb

$$g_1 = A(r, t, \theta, \varphi) dr^2 + B(r, t, \theta, \varphi) dt^2 + 2C(r, t, \theta, \varphi) dr dt ,$$

on $2dr dt$ indica $dr \otimes dt + dt \otimes dr$,

$$g_2 = D(r, t, \theta, \varphi) d\theta^2 + E(r, t, \theta, \varphi) d\varphi^2 + 2F(r, t, \theta, \varphi) d\theta d\varphi .$$

Com que les $\alpha \in SO(3)$ actuen sobre U canviant les coordenades θ i φ , i deixant invariants r, t ,

$$\alpha: (r, t, \theta, \varphi) \longrightarrow (r, t, \theta'(\theta, \varphi), \varphi'(\theta, \varphi)) ,$$

si imposem que aquestes α són isometries, tindrem $\alpha^*(g_{\alpha(x_0)}) = g_{x_0}$, la qual cosa implica $\alpha^*((g_1)_{\alpha(x_0)}) = (g_1)_{x_0}$ i $\alpha^*((g_2)_{\alpha(x_0)}) = (g_2)_{x_0}$. Però

$$\alpha^*((g_1)_{\alpha(x_0)}) = A(r, t, \theta'_0, \varphi'_0) dr^2 + B(r, t, \theta'_0, \varphi'_0) dt^2 + 2C(r, t, \theta'_0, \varphi'_0) dr dt .$$

Si igualem això amb $(g_1)_{x_0}$, obtenim $A(r, t, \theta'_0, \varphi'_0) = A(r, t, \theta_0, \varphi_0)$, $B(r, t, \theta'_0, \varphi'_0) = B(r, t, \theta_0, \varphi_0)$ i $C(r, t, \theta'_0, \varphi'_0) = C(r, t, \theta_0, \varphi_0)$. Però com que existeix sempre una $\alpha \in SO(3)$ que transforma x_0 en un punt qualsevol de $\mathcal{S}(x_0)$, això ens diu que A, B i C no depenen ni de θ ni de φ . Només depenen de r, t . O sigui, g_1 és una mètrica $d\omega^2$ sobre $\mathcal{C}(x_0)$. D'altra banda, com que $f: (r, t, \theta, \varphi) \rightarrow (r_0, t_0, \theta, \varphi)$ és conforme, $(g_2)_{(r, t, \theta, \varphi)} = k(r, t)(g_2)_{(r_0, t_0, \theta, \varphi)}$ amb $k > 0$. Però $\mathcal{S}(x_0)$ té curvatura constant positiva per la proposició 19.11. Això prova el teorema. ■

4 Varietats de Lorentz amb simetria esfèrica i tensor de Ricci nul

Com hem dit al començament d'aquest capítol, el nostre objectiu és descriure el camp gravitatori engendrat per una estrella esfèrica al seu exterior. Hem

vist que l'equació d'Einstein a l'exterior (on no hi ha matèria) era equivalent a la condició d'anul·lació del tensor de Ricci. Això ens porta a interessar-nos per les varietats de Lorentz amb simetria esfèrica i tensor de Ricci nul. Demostrarem en aquesta secció el resultat següent, conegut com a teorema de Birkhoff (1923) (l'enunciat i la presentació originals de Birkhoff no són del tot correctes. Nosaltres seguirem les pautes de Bergman, Cahen i Koman (J. Math. Phys. 6 (1965), pp. 1-5).

Teorema 19.13 *Sigui (M, g) una varietat de Lorentz amb simetria esfèrica i tensor de Ricci nul. Existeix un subconjunt $S \subset M$ tancat i de mesura nul·la (possiblement buit) tal que per a cada $x_0 \in M - S$ no fix per l'acció de $SO(3)$ existeix una carta local $(U, r, t, \theta, \varphi)$, amb U entorn de x_0 , on g s'expressa per*

$$g = \frac{1}{1 - k/r} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - (1 - k/r) dt^2, \quad (19.3)$$

on k és una constant. Sobre l'estructura del subconjunt S es pot afirmar el següent: sobre l'obert M' de M de punts no fixos per l'acció de $SO(3)$ existeix una funció diferenciable $F: M' \rightarrow \mathbf{R}$ que no s'anul·la sobre cap obert i tal que $S = \{x \in M' \text{ tals que } F(x) = 0\}$. Sobre cada carta local $(U, r, t, \theta, \varphi)$ on la mètrica g s'expressa per (19.3), la funció F ve donada per $F(x) = 1 - k/r(x)$.

DEMOSTRACIÓ. Si (M, g) admet simetria esfèrica, en virtut del teorema 19.6 podem trobar un entorn U de x_0 que és domini d'una carta local cúbica $(U, r, t, \theta, \varphi)$ sobre la qual la mètrica g s'expressa per

$$g = d\omega^2 + k^2(r, t) d\Omega^2,$$

on $d\omega^2$ és una mètrica d'índex 1 sobre la superfície $\mathcal{C}_0$ d'equacions $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$, i $d\Omega^2$ és una mètrica sobre la superfície $\mathcal{S}_0$ d'equacions $r = r_0$, $t = t_0$, on $(r_0, t_0, \theta_0, \varphi_0)$ les coordenades de x_0 . A més, la mètrica $d\Omega^2$ és de curvatura constant positiva, això és, conforme a la de l'esfera unitat S^2 de $\mathbf{R}^3$.

Si a S^2 indiquem per θ la colatitud d'un punt (angle des del pol nord de S^2 fins al punt, mesurat sobre el meridià que passa pel punt) i per φ la longitud (angle en el pla $z = 0$ de l'equador entre la projecció del punt i l'eix de les x), els punts de S^2 es poden parametritzar per

$$\begin{cases} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos \varphi \\ y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sin \varphi \\ z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{cases}.$$

Llavors la mètrica euclidiana de $\mathbf{R}^3$, $dx^2 + dy^2 + dz^2$, dóna a S^2 la mètrica $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$, que té curvatura constant 1. Com que S_0 té curvatura constant positiva, podem elegir les coordenades θ i φ de S_0 de manera que la mètrica $d\Omega^2$ de S_0 s'expressi per $C^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$, on C és una constant. També podem escollir les coordenades r, t sobre la superfície C_0 de manera que les corbes de C_0 $r = \text{constant}$ i $t = \text{constant}$ siguin ortogonals. Llavors la mètrica g s'expressarà en aquestes coordenades:

$$g = \underbrace{X^2(r, t)dr^2 - Z^2(r, t)dt^2}_{d\omega^2} + Y^2(r, t)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (19.4)$$

El nostre objectiu, ara, és calcular el tensor de Ricci d'aquesta mètrica i imposar la condició d'anul·lació d'aquest tensor. A U , els camps vectorials $\partial/\partial r$, $\partial/\partial \theta$, $\partial/\partial \varphi$ i $\partial/\partial t$ són ortogonals, però no unitaris. Definim

$$e_1 = \frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial r} , \quad e_2 = \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial \theta} , \quad e_3 = \frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} , \quad e_4 = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial t} . \quad (19.5)$$

Llavors els tres primers tindran norma 1, mentre que $g(e_4, e_4) = -1$. La base dual de $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ estarà formada per les 1-formes

$$\theta^1 = X dr , \quad \theta^2 = Y d\theta , \quad \theta^3 = Y \sin \theta , \quad \theta^4 = Z dt , \quad (19.6)$$

ja que $\theta^i(e_j) = \delta_{ij}$ (símbols de Kronecker). Anomenem (ω_i^j) la matriu de formes de connexió en aquesta base (capítol 5, apartat 9). Recordem que ω_i^j són 1-formes definides per

$$\nabla_T e_i = \omega_i^j(T) e_j ,$$

per a qualsevol camp vectorial T . La matriu de 1-formes (ω_i^j) compleix les relacions següents:

$$\begin{aligned} (\omega_\alpha^\beta) \text{ és una matriu antisimètrica quan } \alpha, \beta = 1, 2, 3 \\ \omega_4^\alpha = \omega_\alpha^4 \\ \omega_4^4 = 0 . \end{aligned} \quad (19.7)$$

En efecte, si per g_{ij} designem $g(e_i, e_j)$, per a qualsevol camp vectorial T tindrem

$$g(\nabla_T e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_T e_j) = T(g_{ij}) = 0 .$$

Això s'escriu

$$g_{kj} \omega_i^k + g_{ik} \omega_j^k = 0 .$$

Aquesta relació dona (19.7). Per exemple, si posem $j = 1$, $i = 4$, obtenim $g_{11}\omega_4^1 + g_{44}\omega_1^4 = 0$. O sigui, $\omega_4^1 - \omega_1^4 = 0$. De manera anàloga surten les altres relacions de (19.7). Diferenciant les expressions (19.6) i indicant per $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ les derivades respectives de X, Y, Z respecte a t , i per X', Y', Z' les derivades respecte a r , tindrem

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \dot{X}dt \wedge dr = \frac{\dot{X}}{ZX} \theta^4 \wedge \theta^1 \\ d\theta^2 &= \frac{Y'}{XY} \theta^1 \wedge \theta^2 + \frac{\dot{Y}}{ZY} \theta^4 \wedge \theta^2 \\ d\theta^3 &= \frac{Y'}{XY} \theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{\dot{Y}}{YZ} \theta^4 \wedge \theta^3 + \frac{\cotan \theta}{Y} \theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\theta^4 &= \frac{Z'}{ZX} \theta^1 \wedge \theta^4. \end{aligned}$$

Sabem que les θ^i i les formes de connexió ω_i^j estan relacionades per l'equació

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \omega_j^i. \quad (19.8)$$

Ara bé, tenint en compte les relacions (19.7) només hi haurà sis ω_i^j independents no nul·les. Fàcilment es calculen aquestes ω_i^j perquè compleixin (19.8), i s'obté

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= -\frac{Y'}{XY} \theta^2 = -\frac{Y'}{X} d\theta \\ \omega_3^1 &= -\frac{Y'}{XY} \theta^3 = -\frac{Y' \sin \theta}{X} d\varphi \\ \omega_2^3 &= \frac{\cotan \theta}{Y} \theta^3 = \cos \theta d\varphi \\ \omega_4^1 &= \frac{\dot{X}}{ZX} \theta^1 + \frac{Z'}{ZX} \theta^4 = \frac{\dot{X}}{Z} dr + \frac{Z'}{X} dt \\ \omega_4^2 &= \frac{\dot{Y}}{YZ} \theta^2 = \frac{\dot{Y}}{Z} d\theta \\ \omega_4^3 &= \frac{\dot{Y}}{YZ} \theta^3 = \frac{\dot{Y}}{Z} \sin \theta d\varphi. \end{aligned}$$

Llavors es poden calcular les 2-formes Ω_i^j de curvatura per mitjà de

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \quad (19.9)$$

En el nostre cas (designant també amb el signe $\circ$ les derivades respecte a t quan

un puntet pugui passar desapercbut per raons tipogràfiques) s'obté

$$\begin{aligned}
 \Omega_2^1 &= \left\{ \left(\frac{Y'}{X} \right)' - \frac{\dot{Y}\dot{X}}{Z^2} \right\} d\theta \wedge dr + \left\{ \left(\frac{Y'}{X} \right)^\circ - \frac{\dot{Y}Z'}{ZX} \right\} d\theta \wedge dt \\
 \Omega_3^1 &= \left\{ \frac{\dot{Y}\dot{X}}{Z^2} - \left(\frac{Y'}{X} \right)' \right\} \sin\theta dr \wedge d\varphi + \left\{ \frac{\dot{Y}Z'}{ZX} - \left(\frac{Y'}{X} \right)^\circ \right\} \sin\theta dt \wedge d\varphi \\
 \Omega_2^3 &= \left\{ \left(\frac{Y'}{X} \right)^2 - 1 - \left(\frac{\dot{Y}}{Z} \right)^2 \right\} \sin\theta d\theta \wedge d\varphi \\
 \Omega_4^1 &= \left\{ \left(\frac{Z'}{X} \right)' - \left(\frac{\dot{X}}{Z} \right)^\circ \right\} dr \wedge dt \\
 \Omega_4^2 &= \left\{ \left(\frac{\dot{Y}}{Z} \right)' - \frac{\dot{X}Y'}{ZX} \right\} dr \wedge d\theta + \left\{ \left(\frac{\dot{Y}}{Z} \right)^\circ - \frac{Z'Y'}{X^2} \right\} dt \wedge d\theta \\
 \Omega_4^3 &= \left\{ \left(\frac{\dot{Y}}{Z} \right)' - \frac{\dot{X}Y'}{ZX} \right\} \sin\theta dr \wedge d\varphi + \left\{ \left(\frac{\dot{Y}}{Z} \right)^\circ - \frac{Z'Y'}{X^2} \right\} \sin\theta dt \wedge d\varphi .
 \end{aligned}$$

Recordem que de les 2-formes de curvatura Ω_i^j s'obté el tensor de curvatura R per medi de $R(T_1, T_2)e_j = 2\Omega_j^k(T_1, T_2)e_k$, on (T_1, T_2) és un parell qualsevol de vectors. De la definició de tensor de Ricci obtenim l'expressió

$$\text{Ric} = 2\Omega_h^j(e_j, e_k)\theta^k \otimes \theta^h .$$

El coeficient de $\theta^1 \otimes \theta^1$, que designarem per R_{11} , és $2\Omega_1^j(e_j, e_1)$. Un càlcul immediat dóna

$$R_{11} = \text{coef. de } \theta^1 \otimes \theta^1 = \frac{2}{YX} \left\{ \frac{\dot{Y}\dot{X}}{Z^2} - \left(\frac{Y'}{X} \right)' \right\} - \frac{1}{ZX} \left\{ \left(\frac{Z'}{X} \right)' - \left(\frac{\dot{X}}{Z} \right)^\circ \right\} .$$

Anàlogament es calculen els altres coeficients, i s'obté

$$\begin{aligned}
 R_{22} &= \frac{1}{XY} \left\{ \frac{\dot{Y}\dot{X}}{Z^2} - \left(\frac{Y'}{X} \right)' \right\} + \frac{1}{Y^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\dot{Y}}{Z} \right)^2 - \left(\frac{Y'}{X} \right)^2 \right\} + \\
 &+ \frac{1}{ZY} \left\{ \left(\frac{\dot{Y}}{Z} \right)^\circ - \frac{Z'Y'}{X^2} \right\} \\
 R_{33} &= R_{22} \\
 R_{44} &= \frac{1}{XZ} \left\{ \left(\frac{Z'}{X} \right)' - \left(\frac{\dot{X}}{Z} \right)^\circ \right\} + \frac{2}{YZ} \left\{ \frac{Z'Y'}{X^2} - \left(\frac{\dot{Y}}{Z} \right)^\circ \right\} \\
 R_{14} &= \frac{2}{YZ} \left\{ \frac{\dot{Y}Z'}{ZX} - \left(\frac{Y'}{X} \right)^\circ \right\}.
 \end{aligned}$$

Tots els altres coeficients de $\theta^i \otimes \theta^j$ que no hem esmentat són nuls.

La funció Y , que aquí hem considerat només sobre la carta local U , està intrínsecament definida en tot l'obert M' de M format pels punts no fixos per l'acció de $SO(3)$, de la manera següent. Sigui $x \in M'$. Si el grup d'isotropia I_x de x és connex, llavors l'òrbita $\mathcal{S}(x)$ que passa per x (òrbita respecte a l'acció de $SO(3)$) és isomètrica a una esfera de $\mathbf{R}^3$ (proposició 19.11). En aquest cas,

$$4\pi Y^2(x) = \text{àrea de la superfície } \mathcal{S}(x).$$

Si I_x no és connex, $\mathcal{S}(x)$ és isomètrica a un espai projectiu P_2 . Llavors

$$4\pi Y^2(x) = 2\text{àrea de la superfície } \mathcal{S}(x).$$

En qualsevol cas tenim definida $Y(x)$ intrínsecament per les fórmules anteriors. Definim la funció F de què ens parla l'enunciat de la proposició, de la manera següent:

$$F = g(\text{grad } Y, \text{grad } Y).$$

Recordem que el gradient d'una funció f és el camp vectorial $\text{grad } f$ que compleix $g(\text{grad } f, T) = T(f)$ per a qualsevol camp vectorial T . Com que Y , en la carta local $(U, r, t, \theta, \varphi)$, només depèn de r i t , el camp $\text{grad } Y$ serà de la forma

$$\text{grad } Y = a \frac{\partial}{\partial r} + b \frac{\partial}{\partial t}.$$

Calculem a i b . Com que $g(\text{grad } Y, \partial/\partial r) = (\partial/\partial r)Y = Y'$, resulta $a = Y'/X^2$. Anàlogament, $b = -\dot{Y}/Z^2$. Per tant,

$$\text{grad } Y = \frac{Y'}{X^2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\dot{Y}}{Z^2} \frac{\partial}{\partial t}.$$

La funció F , en la carta local U , s'expressarà

$$F = \left(\frac{Y'}{X} \right)^2 - \left(\frac{\dot{Y}}{Z} \right)^2.$$

Vegem, en primer lloc, que F no es pot anul·lar sobre cap obert. En efecte, si F s'anul·lés sobre un obert, en aquest obert tindríem alguna de les dues identitats següents:

$$\frac{Y'}{X} = \frac{\dot{Y}}{Z}$$

o bé

$$\frac{Y'}{X} = -\frac{\dot{Y}}{Z}.$$

Sempre podríem suposar que es compleix la primera, ja que en cas de complir-se la segona, canviant Z per $-Z$ (amb la qual cosa la mètrica no canvia, ja que a l'expressió (19.4) hi figura Z^2), es compliria la primera. Llavors, l'equació $R_{14} = 0$ implica

$$\frac{Y'}{X} \frac{Z'}{X} - \left(\frac{\dot{Y}}{Z} \right)^\circ = 0.$$

Substituint això a l'equació $R_{44} = 0$, s'obté

$$\left(\frac{Z'}{X} \right)' - \left(\frac{\dot{X}}{Z} \right)^\circ = 0.$$

Substituint això a l'equació $R_{11} = 0$, s'obté

$$\frac{\dot{Y}\dot{X}}{Z^2} - \left(\frac{Y'}{X} \right)' = 0.$$

De l'equació $R_{22} = 0$, s'obté llavors

$$\frac{1}{Y^2} = 0,$$

la qual cosa és absurda, ja que els coeficients de la mètrica no es poden anul·lar.

Anomenem S el subconjunt de M' format pels punts x tals que $F(x) = 0$ (S pot ser buit). Si $x_0 \in M' - S$, prenguem la carta local $(U, r, t, \theta, \varphi)$ amb què treballàvem fins ara de manera que U sigui un entorn de x_0 que no talli S . Llavors F no s'anul·larà mai sobre U .

Suposem, en primer lloc, que $F > 0$ sobre U . Prenguem les coordenades r, t a $\mathcal{C}_0$, que fins ara eren arbitràries (amb l'única condició que fossin ortogonals i t fos temporal), de manera que

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\text{grad } Y}{g(\text{grad } Y, \text{grad } Y)}$$

i que $\partial/\partial t$ sigui perpendicular a $\partial/\partial r$. Com que $g(\text{grad } Y, \text{grad } Y) > 0$, $\text{grad } Y$ és un vector espacial. A la superfície $\mathcal{C}_0$, el vector $\partial/\partial t$ serà temporal, pel fet de ser perpendicular a $\partial/\partial r$. Tindrem

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial r} &= g\left(\text{grad } Y, \frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{g(\text{grad } Y, \text{grad } Y)}{g(\text{grad } Y, \text{grad } Y)} = 1 \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= g\left(\text{grad } Y, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 0.\end{aligned}$$

D'on $Y = r + \text{constant}$. Es pot escollir la coordenada r de manera que $Y = r$. Tindrem, llavors, $Y' = 1$, $\dot{Y} = 0$. En aquest cas, l'equació $R_{14} = 0$ s'escriurà

$$\left(\frac{1}{X}\right)^\circ = 0.$$

D'aquí es desprèn que X no depèn de t . L'equació $R_{11} = 0$ s'escriurà

$$-\frac{2}{rX} \left(\frac{1}{X}\right)' - \frac{1}{ZX} \left(\frac{Z'}{X}\right)' = 0. \quad (19.10)$$

L'equació $R_{44} = 0$ s'escriu

$$\frac{1}{XZ} \left(\frac{Z'}{X}\right)' + \frac{2}{rZ} \frac{Z'}{X^2} = 0. \quad (19.11)$$

Utilitzant (19.10), (19.11) s'escriu

$$\frac{Z'}{Z} = -\frac{X'}{X},$$

d'on $Z = K/X$, on K és una constant positiva. Com que X no depèn de t , Z tampoc. L'equació $R_{22} = 0$ s'escriu, llavors,

$$-\frac{1}{Xr} \left(\frac{1}{X}\right)' + \frac{1}{r^2} \left\{1 - \left(\frac{1}{X}\right)^2\right\} - \frac{1}{Zr} \frac{Z'}{X^2} = 0. \quad (19.12)$$

Fent el canvi de variable $X^2 = 1/\lambda$, tindrem $Z = K/X = K\sqrt{\lambda}$. L'equació (19.12) s'escriu, en termes de λ ,

$$\lambda' = \frac{1}{r}(1 - \lambda).$$

La solució general d'aquesta equació és $\lambda = 1 - k/r$. Tindrem

$$X^2 = \frac{1}{1 - k/r} \quad ; \quad Z^2 = K^2 \left(1 - \frac{k}{r}\right).$$

La mètrica g s'escriurà, doncs,

$$g = \frac{1}{1 - k/r} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - K^2 \left(1 - \frac{k}{r}\right) dt^2.$$

Canviant la coordenada t per Kt , s'obté l'expressió (19.3) desitjada.

Suposem $F < 0$ sobre U . Prenguem llavors les coordenades r i t sobre $\mathcal{C}_0$ de manera que

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\text{grad } Y}{g(\text{grad } Y, \text{grad } Y)}$$

i que $\partial/\partial r$ sigui perpendicular a $\partial/\partial t$. Igual que abans, tindrem

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = g \left(\text{grad } Y, \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{g(\text{grad } Y, \text{grad } Y)}{g(\text{grad } Y, \text{grad } Y)} = 1$$

$$\frac{\partial Y}{\partial r} = g \left(\text{grad } Y, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0.$$

Es podrà escollir la coordenada t de manera que $Y = t$. Tindrem, doncs, $\dot{Y} = 1$, $Y' = 0$. Llavors l'equació $R_{14} = 0$ s'escriurà $Z' = 0$, i Z no depèn de r . Les equacions $R_{11} = 0$ i $R_{44} = 0$ s'escriuen

$$\begin{aligned} \frac{2}{tX} \frac{\dot{X}}{Z^2} - \frac{1}{ZX} \left(\frac{\dot{X}}{Z} \right)^\circ &= 0 \\ -\frac{1}{ZX} \left(\frac{\dot{X}}{Z} \right)^\circ - \frac{2}{tZ} \left(\frac{1}{Z} \right)^\circ &= 0. \end{aligned}$$

D'on es dedueix

$$\frac{\dot{X}}{ZX} = \left(\frac{1}{Z} \right)^\circ.$$

O sigui,

$$\frac{\dot{X}}{XZ} = -\frac{\dot{Z}}{Z^2}.$$

D'on $\dot{X}/X = -\dot{Z}/Z$. O sigui, $X = K/Z$, amb K constant positiva. Procedint com en el cas anterior, de l'equació $R_{22} = 0$ s'obté

$$Z^2 = \frac{1}{k/t - 1}.$$

Com que $Z^2 > 0$, $k/t - 1 > 0$. Canviant la variable r per Kr s'obté

$$g = \left(\frac{k}{t} - 1\right) dr^2 + t^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \frac{1}{k/t - 1} dt^2.$$

Si canviem, finalment, els noms de les variables i anomenem t la variable r , i r a la variable t , obtenim l'expressió (19.3) desitjada. Fixem-nos, però, que en aquest cas $\partial/\partial r$ és temporal, ja que abans de canviar el nom de les variables teníem $k/t - 1 > 0$. Per tant, després de canviar de nom, $1 - k/r < 0$. Per tant, $\partial/\partial t$ serà espacial, en contra del que suggereix la notació.

Per fi, de l'expressió (19.3) es dedueix

$$F = g(\text{grad } r, \text{grad } r) = 1 - \frac{k}{r}. \quad \blacksquare$$

5 Camp gravitatori produït per una estrella: solució de Schwarzschild

En absència de camps gravitatoris, la geometria que descriu tots els fenòmens físics és la de l'espai de Minkowski, $\mathbf{R}^4$ amb la mètrica g donada per

$$g = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - c^2 dt^2. \quad (19.13)$$

Tal com hem fet a l'apartat 5 del capítol 18, substituïrem la coordenada temporal t per ct , de manera que la mètrica anterior prengui la següent expressió normalitzada:

$$g = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - dt^2, \quad (19.14)$$

la qual cosa és equivalent a prendre les unitats de manera que la velocitat de la llum c valgui 1. Aquesta mètrica s'expressa de la manera següent en coordenades esfèriques r, θ, φ (on θ indica la colatitud i φ la longitud):

$$g = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - dt^2. \quad (19.15)$$

Situem, ara, un cos esfèric de massa m (una estrella, per exemple) a l'origen de $\mathbf{R}^3$. Aquest cos crearà un camp gravitatori que, d'acord amb els fonaments de la teoria, es traduirà en un canvi de mètrica. La mètrica usual de Minkowski s'haurà de substituir per una altra que voldríem determinar. A l'exterior del cos esfèric (l'estrella) el tensor de Ricci de la mètrica que busquem s'haurà d'anul·lar, tal com hem vist al començament del capítol. Com que aquí només estem interessats en la física de l'exterior de l'estrella, suposarem que el tensor de Ricci és nul. Per la naturalesa del problema (el cos que crea el camp gravitatori se suposa esfèric), és lògic suposar que l'espai-temps que busquem tingui simetria esfèrica. Pel teorema 19.13 la mètrica g que busquem tindrà, localment, l'expressió següent:

$$g = \frac{1}{1 - k/r} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - (1 - \frac{k}{r}) dt^2, \quad (19.16)$$

on k és una constant que, com és lògic, dependrà de l'estrella. Observem en primer lloc que la mètrica (19.16) és singular quan $k = r$. Per evitar aquesta singularitat, prenguem la regió V de $\mathbf{R}^3$ definida en coordenades esfèriques per $r > k$. L'espai de Schwarzschild és, llavors, el producte $M = V \times \mathbf{R}$ dotat de la mètrica (19.16), on r , θ i φ són coordenades esfèriques de V i t és la coordenada corresponent a $\mathbf{R}$. Això, de moment, és una varietat de Lorentz. Per tal de convertir-la en un espai-temps (vegeu les definicions del capítol 18), la dotem de l'orientació temporal que consisteix a dir que $\partial/\partial t$ apunta cap al futur.

$SO(3)$ actua sobre (M, g) sense punts fixos per mitjà de l'acció següent:

$$\begin{aligned} SO(3) \times (V \times \mathbf{R}) &\longrightarrow V \times \mathbf{R} \\ (\alpha, (x, t)) &\longrightarrow (\alpha(x), t), \end{aligned} \quad (19.17)$$

on $\alpha(x)$ indica l'acció usual de $\alpha \in SO(3)$ sobre $x \in \mathbf{R}^3$.

A la mètrica (19.15), r , θ i φ representen les coordenades esfèriques usuals de $\mathbf{R}^3$, i t el temps. A la mètrica (19.16) les coordenades r, θ, φ i t , ja no representaran pas el mateix. Per veure què signifiquen intrínsecament aquestes coordenades, relacionem-les amb l'acció (19.17) de $SO(3)$ sobre M . La funció r és caracteritzada de la manera següent. Per a cada $p \in M$, l'òrbita $\mathcal{S}(p) = \{\alpha(p) \mid \alpha \in SO(3)\}$ dotada de la mètrica induïda per g és isomètrica a una esfera euclidiana de radi $r(p)$. Dit d'una altra manera, l'àrea de $\mathcal{S}(p)$ és $4\pi r^2(p)$. Això dóna una interpretació intrínseca de la coordenada r . θ i φ són respectivament la colatitud i la longitud a l'esfera euclidiana de $\mathbf{R}^3$ que és isomètrica a $\mathcal{S}(p)$. Finalment, sigui X un camp vectorial ortogonal a $\{\partial/\partial r, \partial/\partial \theta, \partial/\partial \varphi\}$ en cada punt (per tant, temporal), apuntant cap al futur, que sigui una isometria infinitesimal de la mètrica. Es pot demostrar que X és

únic amb aquestes condicions, llevat de multiplicació per constants positives. Llavors $\partial/\partial t$ és aquest únic X . La multiplicació per constants positives equival, només, a un canvi d'unitats en la mesura de t .

Observem que si k fos 0 la mètrica (19.16) seria la de Minkowski. Per a camps gravitatoris febles produïts per estrelles de petita massa, k serà, doncs, petita. Observem que, sigui com sigui k , quan r tendeix a ∞ , la mètrica (19.16) tendeix a la de Minkowski, tal com la intuïció ens diu que ha de ser, ja que els efectes del camp gravitatori a l'infinit han de ser nuls. Això també ens diu que ara hem agafat les unitats de t de manera coherent amb l'elecció d'unitats que havíem fet a la mètrica de Minkowski (19.15) (unitats per a les quals $c = 1$).

Ara només ens queda determinar la constant k . Per a això situem-nos en les hipòtesis d'un camp gravitatori feble creat per una estrella de massa petita. En aquest cas els resultats relativistes han de coincidir bastant aproximadament amb els que dóna la mecànica clàssica. Seguint el raonament que hem fet a l'apartat 5 del capítol 18 i reprenent-ne les notacions, $h_{44} = g_{44} + 1$ ha de ser molt aproximadament $-2V/c^2$, on V és el potencial clàssic. Però aquí prenem les unitats de tal manera que $c = 1$. El potencial clàssic creat per una estrella de massa m és $V = -Km/r$, on K és la constant de gravitació universal. Per tant,

$$h_{44} = g_{44} + 1 \cong 2Km/r.$$

O sigui,

$$-(1 - \frac{k}{r}) + 1 \cong 2Km/r.$$

Així doncs, perquè la mecànica clàssica sigui una aproximació de la teoria relativista, hauríem de prendre la constant k molt aproximadament igual a $2mK$. Generalment, també es prenen les unitats de manera normalitzada perquè la constant K de gravitació valgui 1. Utilitzant unitats arbitràries, la mètrica de Schwarzschild ve donada per

$$g = \frac{1}{1 - \frac{2Km}{rc^2}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - c^2 \left(1 - \frac{2Km}{rc^2}\right) dt^2. \quad (19.18)$$

Aquesta mètrica esdevé singular quan $r = 2Km/c^2$. El valor de la constant K de gravitació és $6,672 \times 10^{-11}$ quilograms $^{-1} \times$ metres $^3 \times$ segons $^{-2}$, aproximadament. Així doncs,

$$\begin{aligned} \frac{K}{c^2} &= \frac{6,672 \times 10^{11}}{(3 \times 10^8)^2} \text{quilograms}^{-1} \times \text{metres} = \\ &= 0,7413 \times 10^{-27} \text{quilograms}^{-1} \times \text{metres}. \end{aligned}$$

En una estrella com el sol de massa $m = 1,989 \times 10^{30}$ quilograms, el valor $2Km/c^2$ és de 2,95 quilòmetres. Per tant, la mètrica de Schwarzschild esdevindria singular en una esfera d'àrea aproximada $4\pi \times 3^2$ quilòmetres², de centre el centre del sol. No podem dir que la mètrica de Schwarzschild esdevé singular a una distància de 3 quilòmetres aproximadament des del centre del sol perquè les distàncies de Schwarzschild no són pas les mateixes que les euclidianes. No obstant això, per simplificar el llenguatge, ens podríem permetre aquesta llicència. Com que el sol té bastant més de 3 quilòmetres de radi, i com que sempre hem estudiat el camp gravitatori a l'exterior de l'estrella (a l'interior de l'estrella els fenòmens físics ja no es regeixen per (19.18), per tal com hauríem de substituir la hipòtesi de tensor de Ricci nul per una altra), la mètrica (19.18) no és singular en cap punt en una estrella com el sol, ja que la singularitat és a l'interior del sol i no a l'exterior. Imaginem-nos, però, que tota la massa del sol es concentrés en una petita bola de menys de 3 quilòmetres de radi (parlant amb propietat, de menys de $4\pi \times 3^2$ quilòmetres² de superfície) i, per tant, d'una densitat inimaginablement gran. Llavors la singularitat $r = 2Km/c^2$ seria exterior. ¿Què passaria, llavors? ¿Quin espai-temps hauríem de fer servir per descriure la física d'aquesta estrella? (Recordem que a l'espai-temps de Schwarzschild r sempre era més gran que $k = 2Km/c^2$, per construcció.) D'això en parlarem a la secció 8 d'aquest capítol.

6 Òrbites dels planetes del sistema solar. Avançament del periheli de Mercuri

El moviment d'un planeta del sistema solar serà descrit per una geodèsica de la mètrica (19.18) de vector tangent temporal en tot punt. El mètode més còmode per buscar les geodèsiques d'una mètrica és el descrit en la proposició 8.1 del capítol 8. Per abreviar, escrivim

$$H(r) = 1 - \frac{2Km}{c^2 r}.$$

Si utilitzem $(r, \varphi, \theta, t, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{t})$ com a coordenades naturals del fibrat tangent, considerem en aquest fibrat la funció

$$g = H^{-1}\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - c^2 H \dot{t}^2.$$

Si designem per τ un paràmetre geodèsic, les equacions de les geodèsiques són

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial g}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial g}{\partial r} \quad (19.19)$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial g}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial g}{\partial \theta} \quad (19.20)$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial g}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial g}{\partial \varphi} \quad (19.21)$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial g}{\partial \dot{t}} = \frac{\partial g}{\partial t} . \quad (19.22)$$

De moment no ens interessa la forma explícita de (19.19), però sí la forma explícita de les altres. Si indiquem amb un punt la derivació respecte a τ , tindrem

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial g}{\partial \dot{\theta}} = 4r\dot{r}\dot{\theta} + 2r^2\ddot{\theta}; \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = 2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 .$$

L'equació (19.20) dividida per $2r$ s'escriurà

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 . \quad (19.23)$$

Interessem-nos per les geodèsiques que compleixen les condicions inicials $\theta(0) = \pi/2$ i $\dot{\theta}(0) = 0$ (és a dir, inicialment contingudes en el pla de l'equador de l'esfera $\mathcal{S}(x_0)$, on $x_0 = (r(0), \theta(0), \varphi(0), t(0))$). Evidentment, una elecció convenient de les coordenades θ i φ de S^2 fa que qualsevol corba pugui tenir aquestes condicions inicials. Sabem que existeix una única geodèsica $x(\tau) = (r(\tau), \theta(\tau), \varphi(\tau), t(\tau))$ que passa per $x(0)$ i té $\dot{x}(0)$ com a vector tangent. Suposem que $\theta(0) = \pi/2$. Llavors la corba $x(\tau) = (r(\tau), \pi/2, \varphi(\tau), t(\tau))$, amb $r(\tau), \varphi(\tau), t(\tau)$ qualssevol, satisfà (19.23) ja que $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ i $\cos \theta = 0$. Substituint llavors $\theta = \pi/2$ en les altres equacions (19.19), (19.21) i (19.22), s'obté un sistema amb una incògnita menys que té solució única corresponent als valors inicials $r(0), \varphi(0), t(0), \dot{r}(0), \dot{\varphi}(0)$ i $\dot{t}(0)$. La solució $x(\tau) = (r(\tau), \pi/2, \varphi(\tau), t(\tau))$ així obtinguda és solució del sistema inicial. Resumint, podem suposar que la geodèsica sempre està continguda a l'hiperplà $\theta = \pi/2$.

L'equació (19.21) dona

$$2 \sin \theta \dot{r}\dot{\varphi} + 2r \cos \theta \ddot{\varphi} + r \sin \theta \ddot{\varphi} = 0 .$$

Substituint aquí θ per $\pi/2$ i dividint per $r\dot{\varphi}$, s'obté

$$2 \frac{\dot{r}}{r} + \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = 0 .$$

O sigui,

$$r^2 \dot{\varphi} = h , \quad (19.24)$$

on h és una constant positiva, que és la llei de les àrees (comparem-la amb l'equació (11.25) del capítol 11). L'equació (19.22) s'escriu

$$\frac{dH}{dr}\dot{r}\dot{t} + H\ddot{t} = 0,$$

o sigui, $\dot{H}\dot{t} + H\ddot{t} = 0$, d'on

$$H\dot{t} = E/c, \quad (19.25)$$

on E és una constant positiva (utilitzem la constant E/c en lloc de E per comoditat en càlculs posteriors). Imposem la condició que el vector tangent a la geodèsica $\dot{x}(\tau)$ sigui temporal i tingui norma ic (la qual cosa equival a demanar que el paràmetre geodèsic τ sigui el temps propi):

$$\begin{aligned} \dot{x}(\tau) &= \dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{t}\frac{\partial}{\partial t}, \\ -c^2 &= g(\dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau)) = H^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - c^2\dot{t}^2 H. \end{aligned}$$

Substituint $\dot{\varphi}$ per h/r^2 i $\dot{t}$ per E/cH , s'obté

$$E^2 = \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) H(r) + \dot{r}^2. \quad (19.26)$$

Com fèiem en mecànica clàssica,

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{h}{r^2}.$$

Per tant, tindrem

$$E^2 = \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2Km}{c^2 r}\right) + \frac{h^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2.$$

Fent el canvi de variable $u = 1/r$, es té

$$E^2 = h^2 \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + (c^2 + h^2 u^2) \left(1 - \frac{2Km}{c^2} u\right).$$

Derivant aquesta equació respecte a φ i operant, s'obté

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{mK}{h^2} + \frac{3mK}{c^2} u^2. \quad (19.27)$$

Observem que l'equació que obteníem en mecànica clàssica és la mateixa, llevat del terme $3mKu^2/c^2$ que allà no apareixia (equació (11.26) del capítol 11, amb $m_1 = m$ i $m_2 = 0$, ja que allà tractàvem el problema de dos cossos). En el cas del sistema solar, aquest terme és molt petit respecte als altres (com veurem), i les solucions de (19.27) difereixen molt poc de les clàssiques. Per tal de veure-ho, comparem el terme $3mKu^2/c^2$ amb mK/h^2 . Tindrem

$$\frac{\frac{3mKu^2}{c^2}}{\frac{mK}{h^2}} = \frac{3h^2}{r^2c^2} = (\text{per (19.24)}) = \frac{3}{c^2} \left(r \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 .$$

Si la component tangencial $rd\varphi/d\tau$ de la velocitat del planeta és petita respecte a c , el quocient anterior és molt petit. Comparem ara el terme $3mKu^2/c^2$ amb u . El quocient és

$$\frac{3mKu}{c^2} = \frac{3mK}{rc^2} .$$

El numerador $3mK$, quan m és la massa del sol, val aproximadament $3,9814 \times 10^{20}$ metres³ × segons⁻¹. El denominador més petit correspon a la r de Mercuri quan passa pel periheli. Llavors rc^2 val $4,1383 \times 10^{27}$ metres³ × segons⁻². El quocient val, doncs, $0,9620 \times 10^{-7}$.

Si no hi hagués el terme $3mKu^2/c^2$ la solució de (19.27) seria

$$u = \frac{Km}{h^2} (1 + e \cos(\varphi - \omega)) , \quad (19.28)$$

on e i ω són constants d'integració. Es pot suposar $e \geq 0$ a condició de modificar ω , si cal. Llavors $r = 1/u$, on u ve donat per (19.28), representa una cònica que és el·lipse, hipèrbola o paràbola segons que $0 < e < 1$, $e = 1$ o bé $e > 1$. En el cas dels planetes del nostre sistema solar les òrbites són el·líptiques amb e petita. ω representa l'angle φ corresponent al periheli. Si comptem els angles a partir del periheli, (19.28) s'escriu

$$u = \frac{Km}{h^2} (1 + e \cos \varphi) . \quad (19.29)$$

Però això seria la solució clàssica, si no hi hagués el terme $3mKu^2/c^2$. Estudiem les solucions de (19.27) corresponents als planetes del sistema solar. Anomenem $\tilde{u}$ la solució clàssica (19.29). Posem $u = \tilde{u} + v$ i substituïm a (19.27). Tindrem

$$\left(\frac{d^2\tilde{u}}{d\varphi^2} + \tilde{u} \right) + \left(\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v \right) = \frac{mK}{h^2} + \frac{3mK}{c^2} (\tilde{u} + v)^2 .$$

Com que, per definició de $\tilde{u}$, es compleix

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\varphi^2} + \tilde{u} = \frac{mK}{h^2},$$

ens queda

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = \frac{3mK}{c^2}(\tilde{u} + v)^2.$$

v és allò que s'ha d'afegir a la solució clàssica $\tilde{u}$ per obtenir la solució relativista u . Com que v és molt petit en comparació amb $\tilde{u}$, no farem un error gaire gros si substituïm l'equació anterior per

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = \frac{3mK}{c^2}\tilde{u}^2 = \frac{3mK}{c^2} \cdot \frac{K^2m^2}{h^4}(1 + e \cos \varphi)^2.$$

Utilitzant la fórmula $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$, ens queda

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = \frac{3m^3K^3}{c^2h^4} \left(1 + \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi + \frac{e^2}{2} + 2e \cos \varphi \right). \quad (19.30)$$

Es pot comprovar immediatament, derivant, que

$$v = \frac{3m^3K^3}{c^2h^4} \left(1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{6} \cos 2\varphi + e\varphi \sin \varphi \right) \quad (19.31)$$

és solució de (19.30). Llavors $u = \tilde{u} + v$ serà solució aproximada de (19.27). Derivant, tenim

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\varphi} &= \frac{d\tilde{u}}{d\varphi} + \frac{dv}{d\varphi} = -\frac{Km}{h^2}e \sin \varphi + \\ &+ \frac{3m^3K^3}{c^2h^4} \left(\frac{e^2}{3} \sin 2\varphi + e \sin \varphi + e\varphi \cos \varphi \right). \end{aligned} \quad (19.32)$$

Veiem, doncs, que $du/d\varphi$ s'anul·la per a $\varphi = 0$. O sigui, que la solució u que hem trobat té periheli (r mínim) quan $\varphi = 0$. El següent periheli es produirà quan $\varphi = 2\pi + \delta$, amb δ petit (ja que a la solució clàssica es produeix quan $\varphi = 2\pi$). Estimem aquest δ . En els passos pel periheli es compleix $du/d\varphi = 0$. Per a trobar δ hem de resoldre, doncs, l'equació

$$\begin{aligned} 0 &= -\sin(2\pi + \delta) + \frac{3m^2K^2}{c^2h^2} \left(\frac{e}{3} \sin(4\pi + 2\delta) + \sin(2\pi + \delta) + \right. \\ &\left. + (2\pi + \delta) \cos(2\pi + \delta) \right), \end{aligned}$$

o sigui,

$$0 = -\sin \delta + \frac{3m^2 K^2}{c^2 h^2} \left(\frac{e}{3} \sin 2\delta + \sin \delta + (2\pi + \delta) \cos \delta \right) . \quad (19.33)$$

En els planetes del sistema solar la constant mK/ch és bastant petita. Aplicant la fórmula (11.30) del capítol 11, obtenim que la constant h corresponent a un planeta es relaciona amb el semieix major de l'el·lipse, a , i l'excentricitat e per

$$h^2 = Kma(1 - e^2) . \quad (19.34)$$

En el cas de Mercuri, que és el que té la h més petita, $ch = 8,1385 \times 10^{23}$ metres³ $\times$ segons⁻². D'altra banda Km , on m és la massa del sol, val $1,3271 \times 10^{20}$ metres³ $\times$ segons⁻². Així doncs, en el cas de Mercuri (que és el cas en què la constant $3m^2 K^2/c^2 h^2$ és més gran) la constant $3m^2 K^2/c^2 h^2$ val $0,8 \times 10^{-7}$. Tenint això present, a l'equació (19.33) podem menysprear sense cap remordiment els termes $(3m^2 K^2/c^2 h^2)(e/3) \sin 2\delta$ i $(3m^2 K^2/c^2 h^2) \sin \delta$ ja que estan formats pel producte d'aquesta constant tan petita per $\sin 2\delta$ o bé $\sin \delta$, que són també petits perquè δ és petit. Tindrem, doncs,

$$0 = -\sin \delta + \frac{3m^2 K^2}{c^2 h^2} (2\pi + \delta) \cos \delta ,$$

d'on

$$\delta \cong \tan \delta = \frac{3m^2 K^2}{c^2 h^2} (2\pi + \delta) .$$

D'aquí

$$\delta = \frac{6\pi m^2 K^2}{c^2 h^2} \left(1 - \frac{3m^2 K^2}{c^2 h^2} \right)^{-1} \cong \frac{6\pi m^2 K^2}{c^2 h^2} .$$

El periheli s'avança cada volta l'angle δ expressat en radians. En el cas de Mercuri, això dona $0,8 \times 10^{-7} \times 2\pi$ radians per volta; o sigui, 288×10^{-7} graus per volta. En 100 anys hi ha 415,23 revolucions de Mercuri. Per tant, degut a l'efecte relativista, el periheli de Mercuri s'avançarà 0,012 graus; o sigui 43,2 segons d'arc. L'avançament del periheli dels altres planetes per l'efecte relativista és pràcticament menyspreable.

7 Desviament dels raigs de llum en passar prop del sol, i observadors que mirant endavant es veuen el clatell

A l'apartat anterior ens hem preocupat de les geodèsiques de la mètrica de Schwarzschild de vector tangent temporal. Estudiem aquí les geodèsiques de vector tangent de norma nul·la, que corresponen a les trajectòries dels raigs de llum. ¿En quin punt de l'apartat anterior hem utilitzat el fet que la geodèsica tingui vector tangent temporal? Ho hem utilitzat quan hem imposat que $\dot{x}(\tau)$ tingui norma *ic*. Si ara estem interessats en geodèsiques de vector tangent de norma nul·la, ens valdran tots els càlculs i raonaments de l'apartat anterior fins a l'equació (19.25). Llavors haurem d'imposar que la norma de

$$\dot{x}(\tau) = \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{t} \frac{\partial}{\partial t}$$

sigui nul·la. Això ens donarà

$$0 = \dot{r}^2 H^{-1} + r^2 \dot{\varphi}^2 - c^2 \dot{t}^2 H.$$

Substituint $\dot{\varphi}$ per h/r^2 i $\dot{t}$ per E/cH , s'obté

$$E^2 = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}. \quad (19.35)$$

Com a l'apartat anterior, posant $\dot{r} = (dr/d\varphi)(h/r^2)$, i fent el canvi de variable $u = 1/r$, obtenim

$$E^2 = h^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + h^2 u^2 \left(1 - \frac{2Km}{c^2} u \right).$$

Derivant respecte a φ , i operant, s'obté

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{3mK}{c^2} u^2, \quad (19.36)$$

que dóna la forma geomètrica de les geodèsiques, independentment de la parametrització.

No farem aquí, com tampoc no hem fet a l'apartat anterior, un estudi exhaustiu de totes les solucions de (19.36), sinó només de les que són particularment interessants per a nosaltres. Observem, en primer lloc, que $u = c^2/3Km$ és una solució. Aquesta solució representa una circumferència ($r = 3Km/c^2$).

És a dir, un raig de llum que descriu una circumferència per efectes del camp gravitatori. Perquè aquesta solució sigui exterior a l'estrella haurà de passar que el radi $3Km/c^2$ sigui més gran que el radi de l'estrella. En una estrella de la mateixa massa que el sol, $3Km/c^2$ és aproximadament 4,5 quilòmetres. Si tota la massa del sol estigués concentrada en una bola de 4 quilòmetres de radi, per exemple, els observadors (exterior al sol) que estiguessin a un radi de 4,5 quilòmetres tindrien la satisfacció de veure's el clatell mirant cap endavant. Apressem-nos a dir que aquesta solució de (19.36) és inestable.

Deixem-nos de fantasies i tornem al nostre sistema solar. Procedim a trobar una solució aproximada de (19.36) seguint el mateix procés que a l'apartat anterior. En mecànica clàssica, on no apareix el terme $3mKu^2/c^2$, es té la solució

$$u = \frac{\cos \varphi}{R}, \quad (19.37)$$

on R és una constant. Per tant, $r \cos \varphi = R$. Si en comptes de coordenades polars r, φ , utilitzem coordenades cartesianes $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, la solució clàssica (19.37) esdevé la recta $x = R$. Anomenem $\tilde{u}$ la solució clàssica (19.37). Com a l'apartat anterior, posem $u = \tilde{u} + v$. L'equació (19.36) es converteix en

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + v = \frac{3mK}{c^2} (\tilde{u} + v)^2.$$

Si prescindim de v en el terme $(3mK/c^2)(\tilde{u} + v)^2$, tenim l'equació següent, que és una aproximació de l'anterior:

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + v = \frac{3mK}{c^2 R^2} \cos^2 \varphi. \quad (19.38)$$

Una solució particular de (19.38) és

$$v = \frac{mK}{c^2 R^2} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi).$$

Tindrem

$$u = \tilde{u} + v = \frac{\cos \varphi}{R} + \frac{mK}{c^2 R^2} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi). \quad (19.39)$$

Posant $u = 1/r$ i passant a cartesianes, s'obté

$$x = R - \frac{mK}{c^2 R} \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (19.40)$$

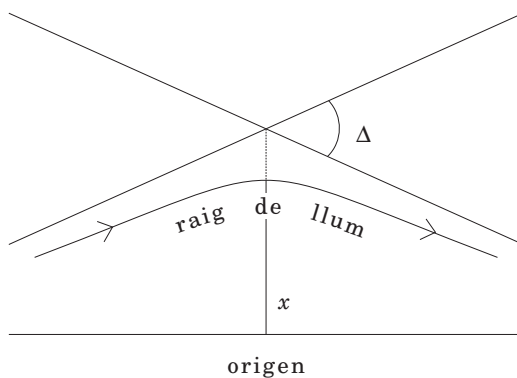


Figura 19.1



Figura 19.2

Les asímptotes s'obtenen fent tendir y a ∞ o a $-\infty$. Llavors la x és menyspreable enfront de la y (que tendeix a ∞ o a $-\infty$) i queda

$$x = R \pm \frac{2mKy}{c^2 R}.$$

L'angle Δ entre aquestes asímptotes (o desviació del raig de llum) és $4mK/c^2 R$ (figura 19.1). Quan un raig de llum passa tangencialment per la superfície del sol, se li haurà d'aplicar la fórmula anterior amb R igual al radi del sol i m la seva massa (figura 19.2). S'obté, llavors, $\Delta = (6/7) \times 10^{-5}$ radians $= 1,7''$.

8 Forats negres. Espai-temps de Kruskal

Suposem que existís una estrella esfèrica de massa m amb radi inferior a $2mK/c^2$ (parlant amb propietat, de superfície menor que $4\pi(2mK/c^2)^2$) i estudiem el camp gravitatori que engendraria. Ja hem dit abans que per a una

massa m igual a la del sol el radi $2mK/c^2$ seria aproximadament de 3 quilòmetres. Per a una massa m igual a la de la Terra $3mK/c^2$ seria d'1 centímetre. Abans de continuar, aquestes dades ens plantegen el dubte raonable de si poden existir estrelles d'una densitat tan inimaginable. Teòricament es pot “demostrar”, a partir d'hipòtesis que semblen bastant raonables, que quan una estrella de massa una mica superior a la del nostre sol acaba el seu combustible, es contreu per efectes de la gravetat i, en poc temps, es produeix un col·lapse que la redueix a un radi pràcticament nul. Nosaltres no entrarem en això, sinó que simplement estudiarem el camp gravitatori d'una estrella de radi inferior a $2Km/c^2$, deixant de banda el problema de l'existència real d'aquestes estrelles que s'anomenen *forats negres*. La raó d'aquesta denominació la veurem més endavant. Quan hem estudiat el camp gravitatori creat per una estrella, el teorema 19.13 ens ha portat a considerar la mètrica (19.18). Aquesta mètrica té una singularitat quan $r = 2Km/c^2$. Per evitar aquesta singularitat, l'espai-temps de Schwarzschild que hem descrit a l'apartat 5 era el producte $M = V \times \mathbf{R}$, on V era la regió de $\mathbf{R}^3$ definida en coordenades esfèriques per $r > 2Km/c^2$. Llavors la mètrica era no singular sobre M . Aquest espai-temps descriu el camp gravitatori de l'estrella quan $r > 2Km/c^2$. Però, ¿com podrem descriure el camp gravitatori a la regió $r \leq 2Km/c^2$? Quan el radi de l'estrella era superior a $2Km/c^2$ no ens interessava gens aquesta regió ja que era interior a l'estrella. Però si suposem que l'estrella té radi inferior a $2Km/c^2$, part de la regió $r \leq 2Km/c^2$ serà exterior.

Com que l'estrella se suposa esfèrica, és lògic suposar que l'espai-temps que descriu el seu camp gravitatori tingui simetria esfèrica i, pel teorema 19.13, que la mètrica d'aquest espai-temps tingui l'expressió (19.18), llevat d'una regió singular de mesura nul·la. Anomenem V , com sempre, la regió de $\mathbf{R}^3$ definida en coordenades esfèriques per $r > 2Km/c^2$. Anomenem W la regió definida per $0 < r < 2Km/c^2$, i anomenem S l'esfera $r = 2Km/c^2$. És lògic suposar que $(V \cup W) \times \mathbf{R}$ amb la mètrica (19.18) sigui l'espai-temps que descriu el camp gravitatori a tot arreu, llevat de la regió $r = 2mK/c^2$. Definim M_I i M_{II} per $M_I = V \times \mathbf{R}$ i $M_{II} = W \times \mathbf{R}$. Observem, en primer lloc, que a M_{II} el camp vectorial $\partial/\partial r$ és temporal i $\partial/\partial t$ és espacial, en contra del que suggereix la notació (ja que $1 - 2mK/c^2 r$ és negatiu). En canvi, a M_I succeïa el contrari.

El model $M = (V \cup W) \times \mathbf{R}$ amb la mètrica (19.18) sembla un mal model, en primer lloc perquè no descriu la regió $r = 2mK/c^2$. ¿És que un cos en moviment no pot travessar la regió $r = 2mK/c^2$? La intuïció ens diu que sí. Llavors aquesta regió hauria de formar part de l'espai-temps. Si afegim a M aquesta regió, la mètrica (19.18) esdevé singular sobre la regió afegida. Aquest mal comportament sembla més fruit d'una mala elecció de les coordenades que s'han utilitzat per expressar la mètrica que no pas d'una causa física profunda.

Si calculéssim el tensor de curvatura de (19.18), veuríem que quan r tendeix a $2mK/c^2$ no té cap singularitat. Tot això ens porta a la pregunta següent: ¿és possible trobar un espai-temps $(\tilde{M}, \tilde{g})$ connex, amb simetria esfèrica, i una immersió injectiva $j: (V \cup W) \times \mathbf{R} \rightarrow \tilde{M}$ de manera que j sigui una isometria? La resposta a aquesta pregunta és afirmativa, com veurem tot seguit.

Si hem de buscar unes altres coordenades que evitin la singularitat $r = 2mK/c^2$ de la mètrica (19.18), és obvi que el canvi l'hem de fer en el pla de les coordenades r, t , que és allà on hi ha la singularitat. No hem de canviar, per tant, ni θ ni φ . Considerem, doncs, el pla de les dues coordenades r, t , amb la mètrica de Schwarzschild

$$g = \frac{1}{1 - \frac{2Km}{rc^2}} dr^2 - c^2 \left(1 - \frac{2Km}{rc^2} \right) dt^2 .$$

En cada punt (r, t) amb $r > 2mK/c^2$, dibuixem el con dels vectors de norma nul·la (figura 19.3). Un vector tangent

$$X = X_r \frac{\partial}{\partial r} + X_t \frac{\partial}{\partial t}$$

tindrà norma nul·la quan $X_r^2 H^{-1} - c^2 X_t^2 H = 0$, on

$$H(r) = 1 - \frac{2Km}{rc^2} .$$

O sigui, els vectors tangents de norma nul·la compliran $X_r = \pm c X_t H$. Quan r tendeix a $2mK/c^2$, com que $H(r)$ tendeix a zero el con tendeix a $X_r = 0$, que en el pla r, t és una recta vertical

Veiem que el con degenera quan $r \rightarrow 2mK/c^2$. Intentem fer un canvi de coordenades

$$\begin{cases} u = u(r, t) \\ v = v(r, t) \end{cases} \quad (19.41)$$

de manera que en les noves coordenades u, v , el con estigui format en tots els punts per les rectes de pendent ± 1 . S'hauria de complir que la recta $X_r = X_t cH$ del pla tangent en el punt (r, t) es convertís en una recta que tingüés pendent 1 en les noves coordenades. El vector transformat de $(cH, 1)$ per l'aplicació lineal tangent de (19.41) serà

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cH \\ 1 \end{pmatrix} .$$

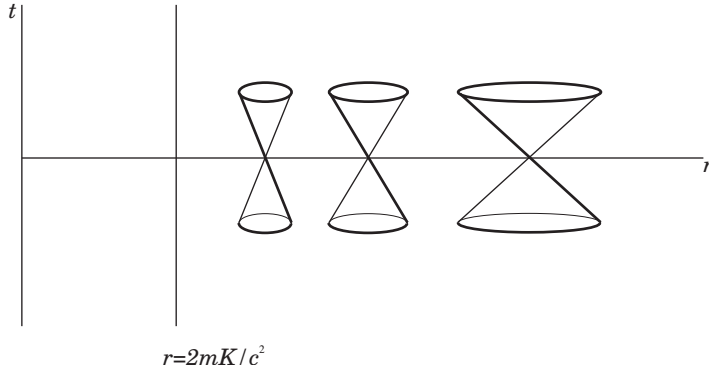


Figura 19.3

Imposant que aquest vector tingui les dues components iguals i operant, tindrem

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) cH = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} . \quad (19.42)$$

Ens interessaria, doncs, que la transformació (19.41) que busquem complís (19.42). Assagem una transformació de la forma

$$\begin{cases} u = A(r)e^{ar} \cosh(cat) \\ v = A(r)e^{ar} \sinh(cat) \end{cases} , \quad (19.43)$$

on A és una funció de r , a és una constant i c la velocitat de la llum. Imposant a (19.43) la condició (19.42) ens queda

$$cHA' + caAH = caA ,$$

d'on

$$\frac{A'}{A} = \frac{a(1-H)}{H} .$$

Tenint en compte la forma de H , s'obté

$$\frac{A'}{A} = \frac{2mK}{c^2} \frac{ac^2}{c^2r - 2mK} ,$$

d'on obtenim

$$A = b(c^2r - 2mK)^{\frac{2mK}{c^2}a} .$$

En integrar, hem suposat implícitament que $c^2 r - 2mK > 0$, ja que hem igualat la derivada de $\log A$ amb la derivada de $(2mK/c^2) \log(c^2 r - 2mK)$. De moment situem-nos a la regió $r > 2mK/c^2$ perquè això es compleixi. Per simplificar l'expressió anterior de A i treballar posteriorment amb comoditat, elegim $a = c^2/4mK$ i $b = (2mK)^{-\frac{1}{2}}$. Amb aquesta elecció de les constants a i b , (19.43) ens queda

$$\begin{cases} u = \left(\frac{c^2 r}{2mK} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{c^2 r}{4mK}} \cosh \frac{c^3}{4mK} t \\ v = \left(\frac{c^2 r}{2mK} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{c^2 r}{4mK}} \sinh \frac{c^3}{4mK} t . \end{cases} \quad (19.44)$$

Observem que de (19.44) es desprèn

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{c^2 r}{2mK} - 1 \right) e^{\frac{c^2 r}{2mK}} . \quad (19.45)$$

De (19.44) també es desprèn

$$\frac{32m^3 K^3}{c^6 r} e^{-\frac{c^2 r}{2mK}} (du^2 - dv^2) = \frac{1}{1 - \frac{2mK}{rc^2}} dr^2 - c^2 \left(1 - \frac{2mK}{rc^2} \right) dt^2 . \quad (19.46)$$

Veiem, doncs, que (19.46) ens dóna la forma que pren la mètrica de Schwarzschild en les coordenades u, v definides per (19.44). La r que apareix en el primer membre de (19.46) s'ha de pensar com la funció de u i v definida implícitament per (19.45).

En el cas $r < 2mK/c^2$, per analogia amb el cas anterior, considerem el canvi següent:

$$\begin{cases} u = \left(1 - \frac{c^2 r}{2mK} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{c^2 r}{4mK}} \sinh \frac{c^3}{4mK} t \\ v = \left(1 - \frac{c^2 r}{2mK} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{c^2 r}{4mK}} \cosh \frac{c^3}{4mK} t . \end{cases} \quad (19.47)$$

D'aquí es desprenen, com en el cas anterior, les igualtats (19.45) i (19.46).

Si mirem ara la mètrica (19.46) expressada en les coordenades u, v , veiem que ja no té cap singularitat quan $r = 2mK/c^2$. Observem que de (19.45) es desprèn que $r = 0$ quan $v^2 - u^2 = 1$. Representem en el pla u, v la hipèrbola $v^2 - u^2 = 1$ corresponent a $r = 0$. Considerem la regió $v^2 - u^2 < 1$ corresponent

a $r > 0$. Anomenem pla de Kruskal P la regió $v^2 - u^2 < 1$ amb la mètrica (19.46). Anomenarem espai de Kruskal el producte $\mathcal{K} = P \times S^2$ amb la mètrica

$$g = \frac{32m^3K^3}{c^6r} e^{-\frac{c^2r}{2mK}} (du^2 - dv^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (19.48)$$

on r ve donat en funció de u i v implícitament per (19.45). El camp vectorial $\partial/\partial v$ està definit en tot punt de $\mathcal{K}$ i és temporal. Posem a $\mathcal{K}$ l'orientació temporal donada pel camp $\partial/\partial v$. Llavors $\mathcal{K}$ amb aquesta orientació temporal és l'espai-temps de Kruskal.

En el pla de Kruskal P , la regió $r = 2mK/c^2$ correspon (segons (19.45)) a les dues rectes $u = \pm v$. Si traiem de P aquestes dues rectes ens queden quatre regions obertes que anomenarem P_I , P_{II} , P_{III} i P_{IV} , tal com indica la figura 19.4, on també indiquem la posició dels cons de futur en aquestes regions (cons en cada espai tangent que contenen $\partial/\partial v$ i limitats per les rectes de vectors de norma nul·la). A la figura també indiquem les línies corresponents a $r = mK/c^2$, $r = 2mK/c^2$, $r = 3mK/c^2$, etc. Siguin $\mathcal{K}_I = P_I \times S^2$, $\mathcal{K}_{II} = P_{II} \times S^2$, $\mathcal{K}_{III} = P_{III} \times S^2$ i $\mathcal{K}_{IV} = P_{IV} \times S^2$. Les transformacions (19.44) i (19.47) donen respectivament difeomorfismes isomètrics entre $\mathcal{K}_I$ i l'espai de Schwarzschild $M_I = V \times \mathbf{R}$ i entre $\mathcal{K}_{II}$ i $M_{II} = W \times \mathbf{R}$. O sigui, si prenem $\mathcal{K}^+ = \{(u, v, \varphi, \theta) \in \mathcal{K} \text{ amb } u+v > 0\}$, la immersió $j: (V \cup W) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{K}^+$ donada per (19.44) respon afirmativament la pregunta que ens havíem plantejat. $\mathcal{K}^+$ ajunta sense singularitats els dos espais de Schwarzschild M_I i M_{II} exterior i interior. De fet, $\mathcal{K}^- = \{(u, v, \varphi, \theta) \in \mathcal{K} \text{ amb } u + v < 0\}$ és isomètric a $\mathcal{K}^+$ per la simetria central $(u, v) \rightarrow (-u, -v)$. Ara bé, aquesta isometria canvia l'orientació temporal.

Observant el dibuix dels cons de futur a la figura, deduïm immediatament que tota corba que apunti cap al futur (o sigui, de vector tangent contingut en el con de futur) i que tingui un punt a la regió $\mathcal{K}_{II}$ o a les hipersuperfícies $r = 2mK/c^2$ que la limiten, ja no pot sortir mai d'aquesta regió i s'encamina necessàriament cap a la singularitat $r = 0$. Per tant, qualsevol partícula material o raig de llum que penetri la superfície $r = 2mK/c^2$ ja no pot sortir mai més cap a fora. No té cap possibilitat (ni disposant d'un motor potentíssim que utilitzés tota l'energia de l'univers) d'escapar-se cap a fora.

S'ha de fer un advertiment al lector que observi la figura 19.4. Cada punt (u, v) d'aquesta figura és, en realitat, una esfera de l'espai de Kruskal $\mathcal{K}$ (ja que $\mathcal{K} = P \times S^2$).

Un fet curiós és que a la superfície crítica $r = 2mK/c^2$ pot haver-hi fotons en repòs (és a dir, raigs de llum que durant tota l'eternitat són sobre $r = 2mK/c^2$, amb $\theta = \theta_0$ (constant) i $\varphi = \varphi_0$ (constant)). Per tal de veure-ho, comprovem

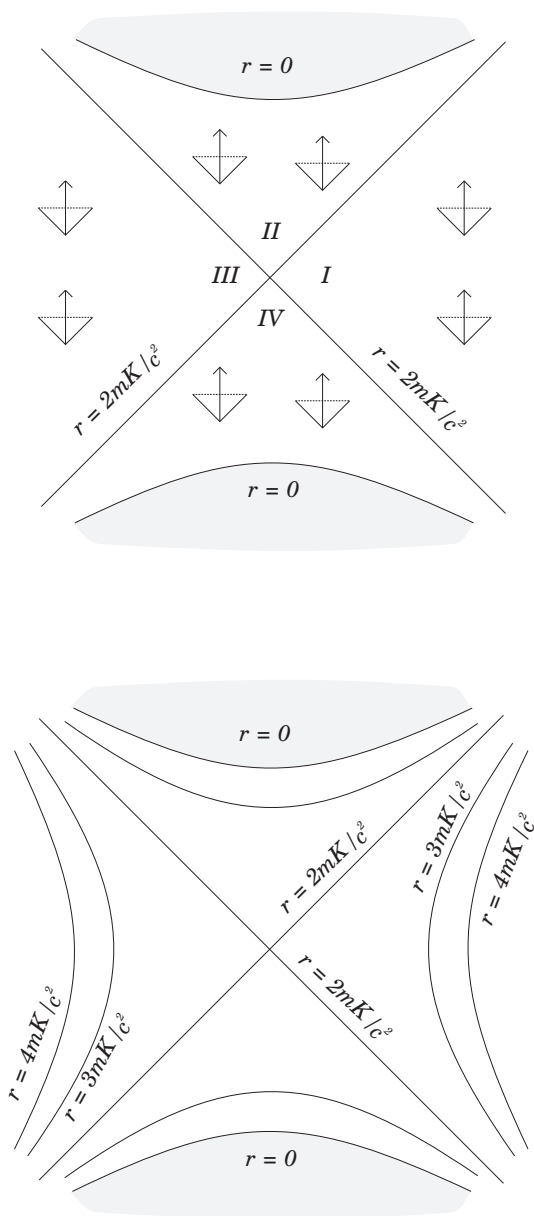


Figura 19.4

que les corbes de la forma

$$x(s) = (u(s), u(s), \theta_0, \varphi_0) ; y(s) = (u(s), -u(s), \theta_0, \varphi_0) , \quad (19.49)$$

on u és una funció convenient de s , satisfan les equacions de les geodèsiques i són, a més, de vector tangent de norma nul·la en tot punt. Una vegada comprovat això, com que les dues rectes $u = \pm v$ de P corresponen a $r = 2mK/c^2$, tindrem el resultat anunciat. Per escriure les equacions de les geodèsiques procedirem com hem fet a l'apartat 6 (on hem aplicat el procediment descrit a la proposició 8.1 del capítol 8). Posem

$$g = \frac{32m^3 K^3}{c^6 r} e^{-\frac{c^2 r}{2mK}} (\dot{u}^2 - \dot{v}^2) + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) .$$

Les equacions de les geodèsiques seran llavors

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial g}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial g}{\partial u} ; \frac{d}{ds} \frac{\partial g}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial g}{\partial v} ; \frac{d}{ds} \frac{\partial g}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial g}{\partial \theta} ; \frac{d}{ds} \frac{\partial g}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial g}{\partial \varphi} . \quad (19.50)$$

Tractem de veure que les corbes de (19.49) satisfan les equacions (19.50). Comencem per la primera equació de (19.50):

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{u}} = \frac{64m^3 K^3}{c^6 r} e^{-\frac{c^2 r}{2mK}} \dot{u} .$$

Si indiquem amb un punt la derivada respecte a s , tindrem

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial g}{\partial \dot{u}} = \frac{d}{dr} \left(\frac{64m^3 K^3}{c^6 r} e^{-\frac{c^2 r}{2mK}} \right) \frac{dr}{ds} \dot{u} + \frac{64m^3 K^3}{c^6 r} e^{-\frac{c^2 r}{2mK}} \ddot{u} .$$

D'altra banda, quan derivem g respecte a u hem de tenir en compte que g depèn de r i que r depèn de u a través de (19.45). Per tant,

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{d}{dr} \left(\frac{32m^3 K^3}{c^6 r} e^{-\frac{c^2 r}{2mK}} \right) (\dot{u}^2 - \dot{v}^2) \frac{\partial r}{\partial u} + 2r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \frac{\partial r}{\partial u} .$$

Però en substituir aquí (19.49) tindrem $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$. Com que a (19.49) $u = \pm v$, tindrem $\dot{u} = \pm \dot{v}$ i, per tant, $\partial g / \partial u = 0$. També tindrem $dr/ds = 0$ ja que r és constant sobre les rectes $u = \pm v$. Per tant, la primera equació de (19.50) es redueix a $\ddot{u} = 0$, que dóna la parametrització de u respecte a s , $u = As + B$. Uns càlculs similars mostren que les altres equacions de les geodèsiques es compleixen, llavors, automàticament.

Diem, però, que aquesta solució dels fotons en repòs és molt inestable, en el sentit que una petita variació de les condicions inicials precipita aquests fotons cap a la singularitat $r = 0$.

Capítol 20

Models cosmològics

¿Com és l'univers? ¿És finit, en el sentit que les diferents galàxies ocupen un espai finit, o al contrari, és infinit? L'univers, ¿ha existit sempre i sempre existirà, o bé existeix des d'un instant inicial? Totes aquestes qüestions que al llarg de la història han estat objecte d'estudi per part de filòsofs i a les quals han donat resposta, també, moltes religions, semblaven fins fa molt poc fora de l'abast de la física i de les matemàtiques. Un dels grans atractius de la teoria de la relativitat és el de constituir l'eina adequada per a proporcionar models teòrics sobre el passat, el present i el futur de l'univers.

Des del primer article d'Einstein sobre cosmologia (1917) s'han produït avenços molt importants en aquest camp, els quals s'han degut a la suma de resultats obtinguts per investigadors purament teòrics, d'una banda, i d'observacions experimentals realitzades per alguns astrònoms o astrofísics, d'una altra. Entre els primers, podem esmentar l'astrònom alemany Willem de Sitter (el qual va demostrar que el model cosmològic que havia donat Einstein el 1917 no és estable i que qualsevol petita pertorbació el converteix en un model d'univers en expansió en què les galàxies s'allunyen les unes de les altres amb velocitats que augmenten amb la distància), el matemàtic rus Alexandrovich Friedmann (que va donar tres models cosmològics molt plausibles segons la densitat de matèria-energia present a l'univers), Robertson i Walker (que van generalitzar els models de Friedmann), i, més recentment, S.W. Hawking (que ha donat un teorema que mostra l'existència d'una singularitat inicial en models molt generals d'univers). Entre els segons, el més important és E.P. Hubble, que va dedicar tota la seva vida a mesurar la distància al nostre sistema planetari de totes les galàxies de les quals l'astrònom Humason havia estudiat prèviament l'espectre, i va descobrir que la velocitat amb què s'allunyen de nosaltres la major part de galàxies és proporcional a la distància que les separa de la nostra. També va tenir una rellevància notable el descobriment

de la radiació còsmica de fons (1965) per un grup de sis astrofísics americans: Penzias, Wilson, Dicke, Peebles, Roll i Wilkinson.

En aquest capítol volem presentar d'una manera detallada els models d'univers de Robertson i Walker i, com a casos particulars, els de Friedmann, perquè constitueixen un punt de partida natural per a la comprensió de la cosmologia.

1 Galàxies

El nostre sistema solar forma part d'una extensa agrupació d'uns 100.000 milions d'estrelles. Aquesta agrupació en forma d'espiral s'anomena Via Làctia. Per descomptat, totes les estrelles que podem distingir a simple vista com un puntet lluminós en el cel formen part d'aquesta agrupació.

La Via Làctia consta d'un nucli en forma de disc, de 15.000 anys llum de radi i d'un gruix de 15.000 anys llum. D'aquest nucli surten dos braços en forma d'espiral. El radi total de l'espiral (des del centre del nucli) és de 40.000 anys llum. El sistema solar es troba en un dels dos braços de l'espiral, anomenat braç d'Orió, a una distància de 30.000 anys llum del centre.

D'agrupacions d'estrelles que tenen estructures similars a la Via Làctia se'n poden contemplar moltíssimes en el cel amb l'ajut de telescopis (algunes són visibles amb simples prismàtics). Aquestes agrupacions s'anomenen galàxies. Cada galàxia té el seu propi moviment. Per exemple, la nostra gira entorn d'ella mateixa una volta cada 250 milions d'anys. Les estrelles individuals que constitueixen una galàxia també tenen moviments propis.

Les galàxies també s'agrupen en cúmuls de galàxies i els cúmuls, a vegades, en cúmuls de cúmuls.

2 Models cosmològics de Robertson-Walker

Imaginem la matèria de l'univers com un fluid on cada "partícula" és una galàxia. Sobre aquestes partícules de fluid (o galàxies) no actua cap força, llevat de la que exerceixen les unes sobre les altres per gravetat. Ara bé, d'acord amb la teoria de la relativitat general no hi ha forces de gravitació, sinó que el moviment de les partícules és representat per geodèsiques de l'espai-temps (M, g) , i és justament la mètrica g la responsable d'allò que a nosaltres ens semblen forces gravitacionals. La mètrica g està relacionada amb la matèria per mitjà de l'equació d'Einstein. Nosaltres ens proposem, en primer lloc, obtenir una expressió local de la mètrica g d'acord amb hipòtesis "naturals".

Suposarem:

Hipòtesi 1. Per cada punt $x \in M$ passa una geodèsica que representa el moviment d'una partícula de fluid. Això equival a dir que aquestes geodèsiques constitueixen una foliació $\mathcal{F}$ de M de dimensió 1 (un flux). Recordem que quan estudiàvem els fluids havíem suposat que les partícules mai no “xocaven”.

En cada $x \in M$ designarem per F_x el subespai de dimensió 1 de $T_x(M)$ tangent a $\mathcal{F}$. L'espai $F_x^\perp$ format pels vectors de $T_x(M)$ ortogonals a F_x serà l'“espai” (de dimensió 3) per als observadors d'aquella galàxia en aquell instant.

Hipòtesi 2. La distribució que a cada $x \in M$ li assigna $F_x^\perp$ és involutiva. Anomenarem $\mathcal{F}^\perp$ aquesta foliació. Les hipersuperfícies (de dimensió 3) integrals d'aquesta distribució (els fulls de $\mathcal{F}^\perp$) seran l'“espai” comú a totes les galàxies en un determinat instant. Aquesta hipòtesi equival, doncs, a dir que existeix un “espai” comú a totes les galàxies en cada instant (Bastaria només suposar que això es compleix en un sol instant).

En cada $x \in M$ sigui U_x el vector tangent al flux $\mathcal{F}$ en el punt x , de norma -1 i que mira cap al futur. Recordem que som en un espai-temps, és a dir, en una varietat de Lorentz amb una orientació temporal. Recordem també que cada corba integral del flux $\mathcal{F}$, pel fet de representar el moviment d'una partícula, té vector director temporal.

En un entorn de cada punt de M podrem aconseguir una carta local amb unes coordenades (t, y^1, y^2, y^3) tals que $\partial/\partial t = U$. Com que la distribució $\mathcal{F}^\perp$ és involutiva, tal com hem fet en la demostració del teorema 19.2 del capítol 19, podrem aconseguir trobar un entorn V de cada $x \in M$ que sigui domini d'una carta local (V, t, x^1, x^2, x^3) , amb $U = \partial/\partial t$ i de manera que les hipersuperfícies $t = \text{constant}$ siguin subvarietats integrals de $\mathcal{F}^\perp$. Llavors t és un temps comú a totes les galàxies (a la carta local V).

Introduïm ara la hipòtesi d'isotropia que està fonamentada en els següents fets experimentals:

- A) Estadísticament, la concentració de galàxies que nosaltres observem no depèn de la particular direcció d'observació. Dit d'una altra manera, no existeix cap regió del firmament observable on la concentració de galàxies sigui (des d'un punt de vista estadístic) més gran que en altres direccions.
- B) Si bé s'ha observat que la major part de galàxies s'allunyen de nosaltres amb una velocitat que depèn de la distància a què es troben de la nostra, tampoc no existeix cap direcció privilegiada on aquestes velocitats siguin més grans que en altres direccions.

Aquests fets experimentals ens porten a formular la hipòtesi següent sobre l'espai-temps (M, g) .

Hipòtesi 3 (Isotropia espacial). Fixat $x \in M$, per a cada parell (u, v) de vectors unitaris de $F_x^\perp$ (vectors espacials) existeix una isometria ϕ de (M, g) que deixa fix x , que preserva $\mathcal{F}$ (és a dir, que transforma corbes integrals de $\mathcal{F}$ en corbes integrals de $\mathcal{F}$) i tal que $(d\phi)_x$ transforma u en v .

Aquesta hipòtesi ve a dir que no hi ha direccions espacials privilegiades; que dues direccions espacials poden transformar-se l'una en l'altra per una isometria que preserva el flux $\mathcal{F}$.

Les hipòtesis 1, 2 i 3 ens donen molta informació sobre com ha de ser l'expressió local de la mètrica g , com posa de manifest el resultat següent.

Teorema 20.1 *Cada punt $x \in M$ té un entorn V que és domini d'una carta local cúbica (V, t, x^1, x^2, x^3) , amb $x = (0, 0, 0, 0)$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, $-\varepsilon < x^i < \varepsilon$, on $\partial/\partial t$ és tangent al flux $\mathcal{F}$ i on la mètrica g s'expressa*

$$g = -dt^2 + f^2(t)\pi_2^*(\tilde{g}),$$

on $\tilde{g}$ és una mètrica de curvatura constant $k = 0$, $k = 1$ ó $k = -1$ sobre la hipersuperfície S_0 de V donada per $t = 0$, i π_2 és la projecció $V \rightarrow S_0$ que assigna $(0, x^1, x^2, x^3)$ a cada (t, x^1, x^2, x^3) .

DEMOSTRACIÓ. Per a cada t_0 , $-\varepsilon < t_0 < \varepsilon$, designem per S_{t_0} la hipersuperfície de V donada per $t = t_0$. Per a cada t amb $-\varepsilon < t < \varepsilon$, designem per μ_t l'aplicació $S_0 \rightarrow S_t$ que assigna (t, x) a cada $(0, x)$. Veurem, en primer lloc, que per a cada x amb $-\varepsilon < x^i < \varepsilon$, $(d\mu_t)_{(0,x)}$ aplica vectors d'igual norma en vectors d'igual norma. Siguin $u, v \in T_{(0,x)}(S_0)$ amb $|u| = |v|$. Per la hipòtesi d'isotropia espacial, existeix una isometria ϕ que preserva $\mathcal{F}$, que deixa fix $(0, x)$ i tal que $(d\phi)_{(0,x)}$ transforma u en v . Veiem que $\phi \circ \mu_t = \mu_t \circ \phi$ en els punts on tots dos membres estan definits. En efecte, ϕ deixa fix $\partial/\partial t$ i la distribució $\mathcal{F}^\perp$. Per tant, haurà de ser de la forma $(t, y) \rightarrow (t, \psi(y))$. Queda clar, doncs, que commuta amb μ_t . Tindrem llavors

$$|(d\mu_t)v| = |(d\mu_t)(d\phi)u| = |(d\phi)(d\mu_t)u| = |(d\mu_t)u|.$$

Per a cada parell (t, x) , amb $-\varepsilon < t < \varepsilon$ i $-\varepsilon < x^i < \varepsilon$, posem $h(t, x) = |(d\mu_t)u|^2$, on u és un vector unitari de $F_{(0,x)}^\perp$ (hem vist que $|(d\mu_t)u|$ no depèn del vector unitari u de $F_{(0,x)}^\perp$ elegit). Si $X \in F_{(0,x)}^\perp$, $X \neq 0$, el vector $X' = X/|X|$ serà unitari. Tindrem

$$|(d\mu_t)X|^2 = |X|^2|(d\mu_t)X'|^2 = |X|^2h(t, x).$$

Si $X, Y \in F_{(0,x)}^\perp$, tindrem

$$\begin{aligned} g((d\mu_t)X, (d\mu_t)Y) &= \frac{1}{2} \{g((d\mu_t)(X+Y), (d\mu_t)(X+Y)) - \\ &\quad - g((d\mu_t)X, (d\mu_t)X) - g((d\mu_t)Y, (d\mu_t)Y)\} = \\ &= \frac{1}{2} h(t, x) \{g(X+Y, X+Y) - g(X, X) - g(Y, Y)\} = \\ &= h(t, x) g(X, Y). \end{aligned}$$

A la carta local (V, t, x^1, x^2, x^3) , la mètrica g s'expressarà

$$g = -dt^2 + \sum g_{ij}(t, x) dx^i dx^j,$$

on

$$\begin{aligned} g_{ij}(t, x) &= g\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(t,x)}, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{(t,x)}\right) = \\ &= g\left((d\mu_t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(0,x)}, (d\mu_t)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{(0,x)}\right) = \\ &= h(t, x) g_{ij}(0, x). \end{aligned}$$

Per tant, g serà de la forma

$$g = -dt^2 + h(t, x) \pi_2^*(\tilde{g}),$$

on $\tilde{g}$ és una mètrica a S_0 .

Provem ara que la funció $h(t, x)$ no depèn de x (només depèn de t). Per a això basta veure que si $X \in F_{(x,t)}^\perp$, $X(h) = 0$. Suposem $X \neq 0$. Prenguem $u = (d\mu_t^{-1})_{(t,x)} X$ i $u' = u/|u|$. u' serà unitari i $u' \in F_{(0,x)}^\perp$. Sigui $\sigma(\tau)$ la geodèsica de S_0 que surt de $(0, x)$ amb vector tangent u' . Sigui $\alpha(\tau) = \mu_t(\sigma(\tau))$. $\alpha(\tau)$ serà una corba de S_t que surt de (x, t) amb vector tangent $(d\mu_t)u' = ((d\mu_t)u)/|u| = X/|u|$. Provarem que $h(\alpha(\tau)) = h(\alpha(-\tau))$, amb la qual cosa

$$(X/|u|)(h) = \frac{d}{d\tau} h(\alpha(\tau))|_{\tau=0} = 0,$$

i per tant $X(h) = 0$. Es té $h(\alpha(\tau)) = |(d\mu_t)(\dot{\sigma}(\tau))|$, ja que $\dot{\sigma}(\tau)$ és unitari per ser tangent a una geodèsica per a la qual $\dot{\sigma}(0) = u'$ és unitari. Sigui ϕ una isometria que preservi $\mathcal{F}$, que deixi fix $(0, x)$ i que $(d\phi)_{(0,x)}$ transformi u en $-u$. Llavors

$$(d\phi)_{\sigma(\tau)}(\dot{\sigma}(\tau)) = -\dot{\sigma}(-\tau).$$

Tindrem

$$\begin{aligned}
 h(\alpha(\tau)) &= |(d\mu_t)(\dot{\sigma}(\tau))| = |(d\phi)(d\mu_t)(\dot{\sigma}(\tau))| = \\
 &= |(d\mu_t)(d\phi)(\dot{\sigma}(\tau))| = |(d\mu_t)(-\dot{\sigma}(-\tau))| = |(d\mu_t)(\dot{\sigma}(-\tau))| = \\
 &= h(\alpha(-\tau)) .
 \end{aligned}$$

Resumint, tenim $g = -dt^2 + h(t)\pi_2^*(\tilde{g})$, amb $h(t) > 0$ i $\tilde{g}$ una mètrica a S_0 . Provem ara que la mètrica $\tilde{g}$ de S_0 ha de tenir curvatura constant. Per a veure això demostrarem que, fixat un punt $(0, x) \in S_0$ i un pla π (de dimensió 2) de $F_{(0,x)}^\perp$, la curvatura seccional $C_x(\pi)$ de la mètrica $\tilde{g}$ en el punt $(0, x)$ corresponent al pla π no depèn del pla π elegit a $F_{(0,x)}^\perp$. En efecte, si π' és un altre pla de $F_{(0,x)}^\perp$, siguin u i u' vectors unitaris de $F_{(0,x)}^\perp$ perpendiculars respectivament a π i π' . Sigui ϕ una isometria que preservi $\mathcal{F}$, deixi fix $(0, x)$ i transformi u en u' . Llavors $d\phi$ transformarà el pla π en π' i, òbviament, $C_x(\pi') = C_x((d\phi)(\pi)) = C_x(\pi)$. El teorema de Schur (Teorema 5.32 del capítol 5) ens assegura ara que $\tilde{g}$ té curvatura constant. Podem finalment suposar que la curvatura de $\tilde{g}$ és 0, 1 ó -1 , a condició de substituir $f^2(t)$ per una altra funció que difereixi de la primera en un factor constant. ■

De les hipòtesis 1, 2 i 3 no podem deduir en absolut com pot ser la varietat (M, g) globalment. No obstant el teorema 20.1 ens suggereix que el model global més senzill d'espai-temps compatible amb les hipòtesis 1, 2 i 3 és $M = I \times S$, on I és un interval obert de $\mathbf{R}$ (que pot ser tot $\mathbf{R}$), S és una varietat de Riemann dotada d'una mètrica $\tilde{g}$ de curvatura constant, i M està dotada d'una mètrica de la forma

$$g = -dt^2 + f^2(t)\pi_2^*(\tilde{g}), \quad (20.1)$$

on t és la coordenada de I . Sobre la varietat de Lorentz (M, g) es pren l'orientació temporal que consisteix a dir que el camp vectorial $\partial/\partial t$ apunta cap al futur. Les trajectòries del camp $\partial/\partial t$ representen la vida de les diferents galàxies. Els models d'univers d'aquesta forma es denominen models de Robertson-Walker. En aquests models se suposa, a més, que la matèria (les diferents galàxies) constitueix un fluid perfecte de densitat de massa-energia σ i pressió p que depenen només de t . L'equació d'Einstein relaciona llavors f amb σ i p . En els models de Robertson-Walker existeix un temps comú t a totes les galàxies i en cada instant $t = t_0$ d'aquest temps, un espai comú a totes les galàxies, $\{t_0\} \times S$, com a la física Newtoniana.

Ara bé, si volem que t sigui el temps propi dels observadors que estan en repòs respecte a una determinada galàxia (que viatgen amb la galàxia) (temps

propi segons la definició que hem donat al capítol 18) hauríem d'expressar la mètrica g de M de la forma

$$g = -c^2 dt^2 + f^2(t) \pi_2^*(\tilde{g}) \quad (20.2)$$

i no pas sense la constant c^2 com l'expressàvem a (20.1). En efecte, un tal observador és representat per una corba de la forma $t \rightarrow (t, x_0)$. La longitud d'aquesta corba des de t_0 fins a t (per la mètrica (20.1)) és $i(t - t_0)$. Segons la definició de temps propi que hem donat al capítol 18, apartat 2, el temps propi $\tau - \tau_0$ d'un tal observador és $(t - t_0)/c$. Segons això, el temps propi τ dels observadors galàctics està relacionat amb la coordenada t de I per $\tau = t/c$. Resulta més còmode, doncs, prendre el temps propi τ com a coordenada de I , en lloc de t . Llavors la mètrica (20.1) s'expressa $g = -c^2 d\tau^2 + f^2(c\tau) \pi_2^*(\tilde{g})$, i tornant a anomenar t a τ i canviant de nom f , g s'expressa de la forma (20.2), on ara t és el temps propi dels observadors galàctics tal com l'hem definit al capítol 18.

Siguin $(M = I \times S, g)$ i $(M' = I' \times S, g')$ dos models de Robertson-Walker, on g i g' tenen la forma (20.2), i I i I' són intervals de $\mathbf{R}$. Si $I \subset I'$ i si g' coincideix amb g sobre $M \subset M'$, direm que (M, g) està contingut a (M', g') . Direm que un model de Robertson-Walker (M, g) és maximal quan la inclusió $(M, g) \subset (M', g')$ implica $M = M'$ (és a dir, $I = I'$).

3 Relacions entre la funció f , la densitat σ i la pressió p en un model de Robertson-Walker

Situem-nos en un model de Robertson-Walker $M = I \times S$ amb una mètrica de la forma (20.2). Calculem en primer lloc la derivada covariant ∇ associada a la mètrica g . Designarem per U el camp $\partial/\partial t$. Si X és un camp vectorial a S designarem també per X el camp de M a què dóna lloc (l'únic camp perpendicular a $\partial/\partial t$ que es projecta sobre X per π_2).

Proposició 20.2 *Si X, Y són camps vectorials de S , es té:*

a) $\nabla_U U = 0$.

b) $\nabla_U X = \nabla_X U = \frac{\dot{f}}{f} X$.

c) $\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \frac{f\dot{f}}{c^2} \tilde{g}(X, Y) U$,

on $\tilde{\nabla}$ indica la derivada covariant a S i $\dot{f}$ la derivada de f .

DEMOSTRACIÓ. Si A, B, C són camps vectorials sobre M , recordem que $\nabla_A B$ compleix

$$2g(\nabla_A B, C) = Ag(B, C) + Bg(C, A) - Cg(A, B) - g(A, [B, C]) + g(B, [C, A]) + g(C, [A, B]) . \quad (20.3)$$

Apliquem aquesta fórmula quan $A = B = U$ i $C = Z$ (Z , és un camp de S). Observem, primer, que $[U, Z] = 0$ ja que en qualsevol carta local de la forma $I \times V$, on V és carta local de S , Z no depèn de t i, per tant, commuta amb $U = \partial/\partial t$. Tindrem llavors $2g(\nabla_U U, Z) = 0$. Òbviament, de (20.3) es desprèn, també, $2g(\nabla_U U, U) = 0$. D'aquestes dues equacions, obtenim $\nabla_U U = 0$.

Si X i Z són camps de S , de (20.3) obtenim

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_U X, U) &= 0 \\ 2g(\nabla_U X, Z) &= Ug(X, Z) = U(f^2 \tilde{g}(X, Z)) = 2f \dot{f} \tilde{g}(X, Z) = \\ &= 2 \frac{\dot{f}}{f} f^2 \tilde{g}(X, Z) = 2 \frac{\dot{f}}{f} g(X, Z) . \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \nabla_U X &= \frac{\dot{f}}{f} X \\ \nabla_X U &= \nabla_U X + \underbrace{[X, U]}_{=0} . \end{aligned}$$

Quan X, Y, Z són camps de S , de (20.3) tenim

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + \dots = Xf^2 \tilde{g}(Y, Z) + \dots = f^2 X \tilde{g}(Y, Z) + \dots = \\ &= f^2 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = 2g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) . \end{aligned}$$

Posem $\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \lambda U$ i calculem λ :

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{1}{c^2} g(\nabla_X Y, U) = (\text{per (20.3)}) = \frac{1}{2c^2} Ug(X, Y) \\ &= \frac{1}{2c^2} Uf^2 \tilde{g}(X, Y) = \frac{1}{c^2} f \dot{f} \tilde{g}(X, Y) . \end{aligned}$$

Això conclou la demostració. ■

Proposició 20.3 Si X, Y, Z són camps de S , es té:

- a) $R(X, Y)Z = \left\{ \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \right\} (g(Z, Y)X - g(Z, X)Y)$, on k és la curvatura constant de la mètrica $\tilde{g}$, $k = 0, 1$ o -1 .
- b) $R(X, U)U = -\frac{\ddot{f}}{f}X$.
- c) $R(X, Y)U = 0$.
- d) $R(X, U)Y = -\frac{\ddot{f}}{c^2 f}g(X, Y)U$.

DEMOSTRACIÓ. En virtut de la proposició anterior tindrem

$$\begin{aligned} \nabla_Y Z &= \tilde{\nabla}_Y Z + \frac{f\dot{f}}{c^2}\tilde{g}(Y, Z)U \\ \nabla_X \nabla_Y Z &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z + \frac{f\dot{f}}{c^2}\tilde{g}(X, \tilde{\nabla}_Y Z)U + \nabla_X \left(\frac{f\dot{f}}{c^2}\tilde{g}(Y, Z)U \right) = \\ &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z + \frac{f\dot{f}}{c^2}\tilde{g}(X, \tilde{\nabla}_Y Z)U + \frac{f\dot{f}}{c^2}(X\tilde{g}(Y, Z))U + \frac{f\dot{f}}{c^2}\tilde{g}(Y, Z)\nabla_X U. \end{aligned}$$

Però $\tilde{g}(X, \tilde{\nabla}_Y Z) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y X, Z) + Y\tilde{g}(X, Z)$. Per tant,

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z + \left\{ -\frac{f\dot{f}}{c^2}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y X, Z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f\dot{f}}{c^2}Y\tilde{g}(X, Z) + \frac{f\dot{f}}{c^2}X\tilde{g}(Y, Z) \right\}U + \frac{\dot{f}^2}{c^2}\tilde{g}(Y, Z)X. \end{aligned}$$

D'altra banda,

$$\nabla_{[X, Y]} Z = \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z + \frac{f\dot{f}}{c^2}\tilde{g}([X, Y], Z)U.$$

Així doncs, tindrem

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = \\ &= \tilde{R}(X, Y)Z + \frac{\dot{f}^2}{c^2}\tilde{g}(Y, Z)X - \frac{\dot{f}^2}{c^2}\tilde{g}(X, Z)Y, \end{aligned}$$

on $\tilde{R}(X, Y)Z$ indica el tensor de curvatura de la mètrica $\tilde{g}$ de S . Com que aquesta mètrica té curvatura constant k , es tindrà

$$\tilde{R}(X, Y)Z = k(\tilde{g}(Z, Y)X - \tilde{g}(Z, X)Y).$$

Substituint això a l'expressió anterior de $R(X, Y)Z$, s'obté a). Provem b):

$$\begin{aligned} R(X, U)U &= \nabla_X \nabla_U U - \nabla_U \nabla_X U - \nabla_{[X, U]} U = -\nabla_U \left(\frac{\dot{f}}{f} X \right) = \\ &= -\frac{\ddot{f}f - f^2}{f^2} X - \frac{\dot{f}}{f} \frac{\dot{f}}{f} X = -\frac{\ddot{f}}{f} X. \end{aligned}$$

Provem c):

$$\begin{aligned} R(X, Y)U &= \nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X U - \nabla_{[X, Y]} U = \nabla_X \left(\frac{\dot{f}}{f} Y \right) - \nabla_Y \left(\frac{\dot{f}}{f} X \right) \\ &\quad - \frac{\dot{f}}{f} [X, Y] = \frac{\dot{f}}{f} (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) = 0. \end{aligned}$$

Provem d):

$$\begin{aligned} R(X, U)Y &= \nabla_X \nabla_U Y - \nabla_U \nabla_X Y - \nabla_{[X, U]} Y = \\ &= \nabla_X \left(\frac{\dot{f}}{f} Y \right) - \nabla_U \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_U \left(\frac{f\dot{f}}{c^2} \tilde{g}(X, Y)U \right) = \\ &= \frac{\dot{f}}{f} \tilde{\nabla}_X Y + \frac{\dot{f}^2}{c^2} \tilde{g}(X, Y)U - \frac{\dot{f}}{f} \tilde{\nabla}_X Y - \left(\frac{f^2 + f\ddot{f}}{c^2} \right) \tilde{g}(X, Y)U = \\ &= -\frac{\ddot{f}}{c^2 f} \tilde{g}(X, Y)U. \end{aligned}$$

Això prova la proposició. ■

Proposició 20.4 Si designem per Ric el tensor de Ricci de la mètrica g , i si X, Y són camps de S , es compleix:

$$a) \text{ Ric}(X, Y) = \left\{ \frac{\ddot{f}}{c^2 f} + 2\left(\frac{\dot{f}}{cf}\right)^2 + \frac{2k}{f^2} \right\} g(X, Y).$$

$$b) \text{ Ric}(U, U) = -\frac{3\ddot{f}}{f}.$$

$$c) \text{ Ric}(X, U) = 0.$$

DEMOSTRACIÓ. En un punt qualsevol $(t_0, x_0) \in I \times S = M$ considerem tres vectors e_1, e_2, e_3 que siguin base ortonormal de $T_{(t_0, x_0)}(\{t_0\} \times S)$ respecte a la

mètrica g . En aquell punt, tindrem

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y) &= \sum_{\alpha=1}^3 g(R(e_\alpha, X)Y, e_\alpha) - g(R(\frac{1}{c}U, X)Y, \frac{1}{c}U) = \\ &= \left\{ \left(\frac{\dot{f}}{cf} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \right\} \left(\sum_{\alpha} g(X, Y)g(e_\alpha, e_\alpha) - \sum_{\alpha} g(Y, e_\alpha)g(X, e_\alpha) \right) \\ &\quad - g\left(R(\frac{1}{c}U, X)Y, \frac{1}{c}U\right). \end{aligned}$$

Però si $X = \sum X^\alpha e_\alpha$, tindrem

$$\sum_{\alpha} g(Y, e_\alpha)g(X, e_\alpha) = \sum_{\alpha} X^\alpha Y^\alpha = g(X, Y).$$

Llavors la identitat anterior ens dona a).

$$\begin{aligned} \text{Ric}(U, U) &= \sum g(R(e_\alpha, U)U, e_\alpha) - \underbrace{g\left(R(\frac{1}{c}U, U)U, \frac{1}{c}U\right)}_{=0} = \\ &= \sum_{\alpha} -\frac{\ddot{f}}{f}g(e_\alpha, e_\alpha) = -\frac{3\ddot{f}}{f}. \end{aligned}$$

Finalment, és obvi que $\text{Ric}(X, U) = 0$. ■

Corol·lari 20.5 La curvatura escalar R de la mètrica g és

$$R = 6 \left\{ \left(\frac{\dot{f}}{cf} \right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{\ddot{f}}{c^2 f} \right\}.$$

DEMOSTRACIÓ. Amb les mateixes notacions que a la proposició anterior, tenim

$$\begin{aligned} R &= \sum \text{Ric}(e_\alpha, e_\alpha) - \text{Ric}\left(\frac{1}{c}U, \frac{1}{c}U\right) = \frac{3\ddot{f}}{c^2 f} + 6 \left(\frac{\dot{f}}{cf} \right)^2 + \frac{6k}{f^2} + \frac{3\ddot{f}}{c^2 f} = \\ &= 6 \left\{ \left(\frac{\dot{f}}{cf} \right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{\ddot{f}}{c^2 f} \right\}. \end{aligned}$$

Això prova el corol·lari. ■

De la proposició 20.4 i del corol·lari 20.5 es desprèn immediatament el corol·lari següent:

Corol·lari 20.6 *El tensor d'Einstein G de la mètrica g ve donat per:*

$$a) \quad G(X, Y) = \left\{ -\frac{2\ddot{f}}{c^2 f} - \left(\frac{\dot{f}}{cf} \right)^2 - \frac{k}{f^2} \right\} g(X, Y).$$

$$b) \quad G(U, U) = 3 \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 + \frac{3kc^2}{f^2}.$$

$$c) \quad G(X, U) = 0 ,$$

on X, Y són camps de S i k és la curvatura constant de S .

En un model de Robertson-Walker, la matèria és descrita per un fluid perfecte de tensor d'impulsió energia

$$T = \frac{1}{c^2} \left(\sigma + \frac{p}{c^2} \right) U \otimes U + \frac{p}{c^2} g ,$$

on g es considera com a tensor dues vegades contravariant perquè T sigui contravariant. Quan escrivim l'equació d'Einstein

$$G = \frac{8\pi K}{c^2} T , \quad (20.4)$$

considerem T com a tensor dues vegades covariant per poder-lo igualar a G . Llavors es pren com a T

$$T = \frac{1}{c^2} \left(\sigma + \frac{p}{c^2} \right) U^* \otimes U^* + \frac{p}{c^2} g , \quad (20.5)$$

on U^* és la 1-forma que actua sobre qualsevol camp vectorial A per $U^*(A) = g(U, A)$. De l'equació (20.4) tindrem

$$G(U, U) = \frac{8\pi K}{c^2} T(U, U) . \quad (20.6)$$

Ara bé,

$$T(U, U) = \frac{1}{c^2} \left(\sigma + \frac{p}{c^2} \right) c^2 c^2 + \frac{p}{c^2} g(U, U) = c^2 \sigma + p - p = c^2 \sigma .$$

Per tant, (20.6) s'escriu

$$3 \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 + \frac{3kc^2}{f^2} = 8\pi K \sigma . \quad (20.7)$$

Quan X, Y són perpendiculars a U , tenim $T(X, Y) = (p/c^2)g(X, Y)$, i de (20.4) s'obté

$$-\frac{2\ddot{f}}{c^2 f} - \left(\frac{\dot{f}}{cf}\right)^2 - \frac{k}{f^2} = \frac{8\pi K}{c^2} \frac{p}{c^2}.$$

Multiplicant per c^2 , tenim:

$$-\frac{2\ddot{f}}{f} - \left(\frac{\dot{f}}{f}\right)^2 - \frac{kc^2}{f^2} = 8\pi K \frac{p}{c^2}. \quad (20.8)$$

Multiplicant aquesta igualtat per 3 i sumant amb (20.7), s'obté:

$$-\frac{6\ddot{f}}{f} = 8\pi K \left(\frac{3p}{c^2} + \sigma\right).$$

O sigui,

$$-\frac{3\ddot{f}}{f} = 4\pi K \left(\frac{3p}{c^2} + \sigma\right). \quad (20.9)$$

Les igualtats (20.7), (20.8) i (20.9) constitueixen les principals relacions entre f, p i σ en els models de Robertson-Walker. La proposició següent ens dóna una altra relació important.

Proposició 20.7 *Es compleix*

$$\dot{\sigma} + \left(\sigma + \frac{p}{c^2}\right) \frac{3\dot{f}}{f} = 0.$$

DEMOSTRACIÓ. Escrivim explícitament la relació $\operatorname{div} T = 0$. En components, tindrem

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \frac{1}{c^2} \left(\sigma + \frac{p}{c^2}\right) U^i U^j + \frac{p}{c^2} g^{ij} . \\ c^2 \nabla_j T^{ij} &= \nabla_j \left(\sigma + \frac{p}{c^2}\right) U^i U^j + \left(\sigma + \frac{p}{c^2}\right) (\nabla_j U^i) U^j + \\ &\quad + \left(\sigma + \frac{p}{c^2}\right) U^i \nabla_j U^j + \nabla_j (p) g^{ij} . \end{aligned}$$

Tindrem

$$0 = c^2 \operatorname{div} T = U \left(\sigma + \frac{p}{c^2}\right) U + \underbrace{\left(\sigma + \frac{p}{c^2}\right) \nabla_U U}_{=0} + \left(\sigma + \frac{p}{c^2}\right) (\operatorname{div} U) U + \operatorname{grad} p.$$

Multipliquem escalarment la identitat anterior per U , tenint en compte que $g(U, \text{grad } p) = U(p)$. Tindrem

$$0 = -c^2 U(\sigma) - U(p) - (c^2 \sigma + p) \text{div } U + U(p).$$

O sigui,

$$c^2 U(\sigma) + (c^2 \sigma + p) \text{div } U = 0.$$

Ara bé,

$$\text{div } U = \text{traça de l'endomorfisme } \{A \rightarrow \nabla_A U\} = \sum_{\alpha=1}^3 g(\nabla_{e_\alpha} U, e_\alpha),$$

on e_1, e_2, e_3 és base ortonormal de l'espai ortogonal a U (ja que $\nabla_U U = 0$). De la proposició 20.2 b) se segueix que $\text{div } U = 3\dot{f}/f$. Substituint a la identitat que teniem, s'obté finalment la proposició. ■

4 Llei de Hubble

La major part de galàxies s'estan allunyant de nosaltres, ja que els espectres de la llum que ens envien mostren un desplaçament cap al roig. Aquest desplaçament és més accentuat com més llunyana és la galàxia observada. Hubble va dedicar tota la seva vida a l'estimació (per diversos procediments) de les distàncies a què es troben de nosaltres una gran quantitat de galàxies de les quals l'astrònom Humason havia mesurat prèviament el desplaçament cap al roig, i va descobrir experimentalment la llei següent: “La major part de galàxies (llevat d'alguns casos excepcionals) s'allunyen de nosaltres amb una velocitat que és proporcional a la distància que les separa de la nostra”. La constant de proporcionalitat s'estima actualment en $1/(18 \times 10^9)$ anys, si bé en altres èpoques podia haver estat diferent. Si anomenem t_0 el temps galàctic “ara”, a l'instant actual, i H_0 la constant actual de Hubble, tindrem que en els models de Robertson-Walker $f(t)$ compleix

$$f'(t_0) = H_0 f(t_0).$$

Naturalment, com que $f(t_0) > 0$, anomenant H_0 el quocient $f'(t_0)/f(t_0)$, sempre es complirà la relació anterior. L'aportació de Hubble és $H_0 > 0$ (això no ens ho diu la teoria). També és una altra aportació nova l'estimació de H_0 i, sobretot, la confirmació que aquests models teòrics s'ajusten a les dades observades.

5 Principi i fi de l'univers en els models de Robertson-Walker maximals

Situem-nos en un model de Robertson-Walker (M, g) maximal, amb $M = I \times S$ i la mètrica g donada per (20.2). Suposem que la constant de Hubble actual H_0 és positiva i té un valor aproximat de $1/(18 \times 10^9)$ anys. La densitat σ_0 actual de massa-energia de l'univers s'estima situada entre 10^{-31} i 5×10^{-29} grams/centímetres³, mentre que la pressió p_0 té un valor menyspreable respecte a σ_0 .

Teorema 20.8 *Si $H_0 > 0$ i si $p(t) \geq 0$ i $\sigma(t) > 0 \forall t$, llavors:*

- 1) *Existeix un nombre real t_P (principi dels temps) tal que I és un interval obert de la forma $]t_P, t_F[$ o bé de la forma $]t_P, \infty[$. Es compleix $f(t) \rightarrow 0$, $\dot{f}(t) \rightarrow \infty$ i $\sigma(t) \rightarrow \infty$ quan $t \rightarrow t_P$ ($t > t_P$).*
- 2) *En el cas que la curvatura k de S sigui 0 o -1 , $I =]t_P, \infty[$ (hi ha principi de l'univers i no hi ha final), $\dot{f}(t) > 0$ per a tot t (l'univers s'expandeix eternament).*
- 3) *En el cas $k = 1$, $I =]t_P, t_F[$ (t_F és el final dels temps), existeix un $t_m \in I$ tal que $\dot{f}(t) > 0$ per a $t < t_m$ i $\dot{f}(t) < 0$ per a $t > t_m$ (l'univers s'expandeix des del principi fins a t_m i després es contreu), $f(t) \rightarrow 0$, $\dot{f}(t) \rightarrow \infty$ i $\sigma(t) \rightarrow \infty$ quan $t \rightarrow t_F$.*

DEMOSTRACIÓ. Com que $(3p/c^2) + \sigma > 0$, de (20.9) es dedueix $\ddot{f}(t) < 0$ per a tot t . Desenvolupant $f(t)$ per Taylor en el punt t_0 (temps actual), tindrem

$$f(t) = f(t_0) + H_0 f(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} \ddot{f}(\xi)(t - t_0)^2,$$

amb ξ comprès entre t i t_0 . Com que $\ddot{f}(\xi) < 0$, tindrem que $f(t) \leq f(t_0) + H_0 f(t_0)(t - t_0)$ per a tot t . O sigui, la gràfica de la funció $f(t)$ sempre és per sota de la tangent en el punt t_0 . A més, aquesta tangent té pendent positiu, com s'indica a la figura 20.1. Aquesta tangent talla l'eix de les t en el valor de t per al qual $f(t_0) + H_0 f(t_0)(t - t_0) = 0$, o sigui, $t = t_0 - H_0^{-1}$. Per tant, la funció f s'anul·larà necessàriament en un punt $t_P > t_0 - H_0^{-1}$. Com que f no es pot anul·lar sobre I en cap punt i com que, a més, I se suposa maximal, I serà de la forma $]t_P, \infty[$ o bé $]t_P, t_F[$. Com que $t_0 - t_P < t_0 - (t_0 - H_0^{-1})$, tindrem que $t_0 - t_P < H_0^{-1} = 18 \times 10^9$ anys. Així doncs, l'univers té menys de 18×10^9 anys.

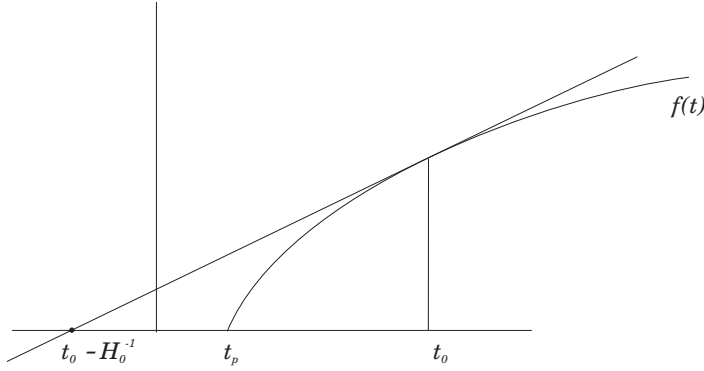


Figura 20.1

Com que $\ddot{f} < 0$, $\dot{f}$ decreix. Com que $\dot{f}(t_0) > 0$, $\dot{f}$ ha de ser positiva a l'interval $[t_P, t_0]$. En virtut de la proposició 20.7, a l'interval $[t_P, t_0]$ tindrem

$$\dot{\sigma} = -3 \left(\sigma + \frac{p}{c^2} \right) \frac{\dot{f}}{f} \leq -3\sigma \frac{\dot{f}}{f},$$

ja que $\dot{f} > 0$ en aquest interval i $p \geq 0$. Això s'escriu

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \leq \frac{-3\dot{f}}{f}.$$

O sigui,

$$\frac{d}{dt}(\log \sigma + 3 \log f) \leq 0.$$

Per tant, la funció $\log(\sigma f^3)$ serà decreixent en sentit ampli en aquest interval, i σf^3 també serà decreixent en sentit ampli. O sigui, $\sigma(t)f^3(t) \geq \sigma(t_0)f^3(t_0)$. Com que $f(t)$ tendeix a zero quan t tendeix a t_P per l'esquerra, $\sigma(t)f^2(t)$ haurà de tendir a ∞ quan t tendeix a t_P (per l'esquerra). De (20.7) s'obté

$$\dot{f}^2 + kc^2 = \frac{8K\pi\sigma f^2}{3}. \quad (20.10)$$

Si σf^2 tendeix a ∞ , $\dot{f}$ haurà de tendir a ∞ . Això prova 1).

Abans hem vist que $\ddot{f}(t) < 0$ per a tot t . Per tant, $\dot{f}(t)$ decreix. Com que $\lim_{t \rightarrow t_P} \dot{f}(t) = \infty$, o bé $\dot{f}$ no s'anul·la mai, o bé s'anul·la en un únic punt t_m

en el qual tindrà un màxim. Veurem ara que aquesta segona possibilitat no es pot presentar mai si suposem $k = 0$ o $k = -1$. En efecte, si existís t_m amb $\dot{f}(t_m) = 0$, de (20.10) tindríem

$$kc^2 = \frac{8K\pi\sigma(t_m)}{3} > 0,$$

i per tant $k > 0$. Si suposem, doncs, $k = 0$ o $k = -1$, $\dot{f}$ decreix i no s'anul·la mai; o sigui, $\dot{f} > 0$, i f creix sempre. Com que s'anul·lava a t_P , no es torna a anul·lar mai, i la mètrica no té altra singularitat que t_P . Per tant, $I =]t_P, \infty[$, ja que el model de Robertson-Walker se suposa maximal. Això prova 2).

Suposem finalment $k = 1$. Hem vist abans que $\ddot{f}(t) < 0$ per a tot t . Per tant, $\dot{f}$ decreix. Vegem ara que $\dot{f}$ s'ha d'anul·lar necessàriament en un punt t_m . Suposem que $\dot{f}$ no s'anul·la mai i arribarem a contradicció. Si $\dot{f}$ no s'anul·lés en cap punt, $\dot{f}(t)$ seria positiva per a tot t . Llavors f creixeria sempre i I seria $]t_P, \infty[$ com en el cas anterior. Llavors podrien presentar-se dues possibilitats:

a) $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$;

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = A > 0$.

En la hipòtesi a) tindríem, en virtut de la proposició 20.7 (com que $\dot{f} > 0$, $\sigma > 0$ i $p \geq 0$)

$$\dot{\sigma} = -3 \left(\sigma + \frac{p}{c^2} \right) \frac{\dot{f}}{f} \leq -3\sigma \frac{\dot{f}}{f},$$

que condueix com abans a la conclusió que σf^3 és decreixent en sentit ampli, la qual cosa implica que σf^3 està acotada per una constant per a t suficientment gran. Com que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$, σf^2 ha de tendir a zero quan $t \rightarrow \infty$. De (20.10) s'obté llavors $\dot{f}^2 + c^2 \rightarrow 0$. Com que $\dot{f} > 0$, $\dot{f}^2 + c^2 > c^2$, la qual cosa és una contradicció. En la hipòtesi b) observem en primer lloc que $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0$. En efecte, pel teorema del valor mig, $f(t+1) - f(t) = \dot{f}(\xi_t)$, on $t < \xi_t < t+1$. O sigui, $|\dot{f}(\xi_t)| \leq |f(t+1) - A| + |A - f(t)|$. Si es pren una successió $t_i \rightarrow \infty$, la successió dels corresponents ξ_{t_i} tendirà a l'infinit i $\dot{f}(\xi_{t_i})$ tendirà a zero. Com que $\dot{f}$ és monòtona, $\dot{f} \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow \infty$. Com que $f \rightarrow A$, $\sigma \rightarrow 3c^2/(8K\pi A^2) > 0$. Per tant, existeixen $\delta > 0$ i $t_0 \in I$ tals que $\sigma(t) > \delta$ per a tot $t > t_0$. D'altra banda, pel teorema del valor mig existeix un ξ_t , $t < \xi_t < t+1$, tal que $\dot{f}(t+1) - \dot{f}(t) = \ddot{f}(\xi_t)$, d'on $|\ddot{f}(\xi_t)| \leq |\dot{f}(t+1)| + |\dot{f}(t)|$. Com que $\dot{f} \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow \infty$, pel mateix raonament d'abans podem trobar una successió creixent $\xi_i \rightarrow \infty$ de manera que $\ddot{f}(\xi_i) \rightarrow 0$. De (20.9) es dedueix que $3p(\xi_i)/c^2 + \sigma(\xi_i) \rightarrow 0$. Però com que $\sigma(t) > \delta$ i $p(t) \geq 0$ per a $t > t_0$, tindrem $3p(\xi_i)/c^2 + \sigma(\xi_i) > \delta$, la qual cosa és absurda. Això prova que $\dot{f}$ s'ha d'anul·lar

en un únic punt t_m . Com que $\ddot{f} < 0$, t_m serà un màxim de f . Prenguem un $t_0 > t_m$. Com que $\ddot{f} < 0$, la diferència

$$f(t) - (f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)) = \frac{1}{2}\ddot{f}(\xi)(t - t_0)^2$$

serà negativa (la gràfica de $f(t)$ estarà per sota de la tangent). Com que $\dot{f}(t_0) < 0$ la tangent en aquest punt té pendent negatiu. Tallarà l'eix de les t en un punt $t_Q > t_m$ i la gràfica de f s'anul·larà necessàriament en un punt t_F entre t_0 i t_Q . Arguments similars als utilitzats en la demostració de 1) mostren que $I =]t_P, t_F[$, $\lim_{t \rightarrow t_F} \dot{f}(t) = \infty$ i $\lim_{t \rightarrow t_F} \sigma(t) = \infty$. ■

6 Com saber si la curvatura de l'espai és positiva, negativa o nul·la

Situem-nos en un model de Robertson-Walker. En un instant donat t_0 la llei de Hubble ens dona $\dot{f}(t_0) = H_0 f(t_0)$, on H_0 és el valor de la constant de Hubble en aquest instant (H depèn de t). Substituint a (20.7), tindrem

$$2H_0^2 + \frac{2kc^2}{f^2(t_0)} = 8\pi K\sigma(t_0) .$$

Veiem, doncs, que k és el signe de $8\pi K\sigma(t_0) - 3H_0^2$, o sigui, el signe de $\sigma(t_0) - (3H_0^2/(8\pi K))$. Per tant, segons si $\sigma(t_0)$ és més petit, igual o superior a $3H_0^2/8\pi K$, k serà -1 , 0 o 1 . El valor $3H_0^2/8\pi K$ s'anomena densitat crítica. Si prenem com a valor de H_0 (en l'actualitat) $1/(18 \times 10^9 \text{ anys})$, com a valor de la constant de gravitació de Newton $K = 6,67 \times 10^{-8} \text{ centímetres}^3/(\text{grams} \times \text{segons}^2)$, obtenim que la densitat crítica a l'actualitat és $5,55 \times 10^{-30} \text{ grams/centímetres}^3$. La densitat de massa de l'univers s'estima entre 10^{-31} i $5 \times 10^{-29} \text{ grams/centímetres}^3$. Com que per altra banda el valor H_0 de la constant de Hubble pot tenir un marge d'error considerable, actualment no estem en condicions de decidir experimentalment el signe de la curvatura.

7 Models de Friedmann

En els models de Robertson-Walker se suposa que la matèria que constitueix l'univers és un fluid perfecte de densitat σ i pressió p . Un model de Robertson-Walker amb la funció $f(t)$ no constant (hipòtesi que sempre es complirà si s'admet la llei de Hubble amb $H_0 > 0$) i la pressió p idènticament nul·la s'anomena model de Friedmann. Es diu també, llavors, que el fluid està constituït

per pols. En l'actualitat la pressió p és pràcticament menyspreable respecte a σ . Per tant, els models de Friedmann s'ajusten bastant bé a les dades observades en l'actualitat. Ara bé, en èpoques remotes en què la matèria era molt densa, la pressió entre les diferents partícules del fluid podria no ser menyspreable, si bé d'altra banda, com que $\sigma(t) \rightarrow \infty$ quan $t \rightarrow t_P$, p també podria resultar menyspreable en comparació amb σ . Els models de Friedmann s'ajusten bastant bé a la situació actual de l'univers, però queda el dubte de saber fins a quin punt s'ajustarien a la situació de l'univers prop del principi de la creació o (en cas de curvatura positiva) prop del final. Els models de Friedmann tenen l'atractiu que la funció $f(t)$ que figura a la mètrica (20.2) pot ser calculada explícitament.

Suposem, doncs, a partir d'ara $p = 0$. La proposició 20.7 s'escriu llavors

$$f^3 \sigma = m , \quad (20.11)$$

on m és una constant positiva. Substituint llavors σ per m/f^3 a l'equació (20.10) s'obté

$$\dot{f}^2 + kc^2 = A/f , \quad (20.12)$$

amb $A = 8\pi Km/3$. Això s'escriu

$$df^2 + kc^2 dt^2 = A dt^2 / f = B c^2 dt^2 / f , \quad (20.13)$$

amb $B = A/c^2$. Reparametritzem $f(t)$ en funció d'un temps τ que compleixi la condició

$$cdt = f(\tau) d\tau \quad (20.14)$$

i que tingui el mateix origen que el temps galàctic t . Prenguem com a origen dels temps l'instant t_P de la creació, que correspondrà a $t = \tau = 0$. L'equació (20.13) s'escriu

$$df^2 + kf^2 d\tau^2 = B f d\tau^2 .$$

És a dir,

$$\frac{df}{d\tau} = \sqrt{Bf - kf^2} . \quad (20.15)$$

Integrem llavors (20.15) en els tres casos possibles, segons els valors de k , amb la condició inicial $f(0) = 0$. Suposem, primer, $k = 0$. En aquest cas (20.15) s'escriu $f^{-\frac{1}{2}} df = B^{\frac{1}{2}} d\tau$, que dóna

$$f = \frac{B\tau^2}{4} . \quad (20.16)$$

Llavors (20.14) s'escriu

$$cdt = f(\tau)d\tau = \frac{B\tau^2}{4}d\tau ,$$

que dóna $ct = B\tau^3/12$. Substituint a (20.16) τ en funció de t i operant, s'obté

$$f(t) = \sqrt[3]{(9/4)Bc^2t^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{(9/4)At^{\frac{2}{3}}} . \quad (20.17)$$

Hauríem pogut obtenir (20.17) de manera més senzilla integrant directament (20.13) en el cas $k = 0$, però més endavant haurem d'utilitzar el paràmetre τ que hem introduït a (20.14).

Suposem ara $k = 1$. L'equació (20.15) s'integra i dóna

$$f(\tau) = \frac{B}{2}(1 - \cos \tau) = \frac{4\pi Km}{3c^2}(1 - \cos \tau) . \quad (20.18)$$

De (20.14) i (20.18) s'obté

$$t = \frac{B}{2c}(\tau - \sin \tau) = \frac{4\pi Km}{3c^3}(\tau - \sin \tau) . \quad (20.19)$$

Llavors (20.18) i (20.19) donen la gràfica de $f(t)$ paramètricament en funció de τ . En el cas $k = -1$ un procés similar dóna

$$\begin{cases} f(\tau) = \frac{4\pi Km}{3c^2}(\operatorname{ch} \tau - 1) \\ t = \frac{4\pi Km}{3c^3}(\operatorname{sh} \tau - \tau) . \end{cases} \quad (20.20)$$

Observem, per exemple, que en el cas $k = 1$ (únic cas en què hi ha principi i fi de l'univers) el principi i la fi corresponen als dos primers zeros de $f(\tau)$ consecutius que són, òbviament, $\tau = 0$ i $\tau = 2\pi$. De (20.19) veiem que el temps t corresponent als dos valors $\tau = 0$ i $\tau = 2\pi$ és $t = 0$ i $t = 8\pi^2 Km/3c^3$. Per tant, la duració de l'univers en el cas $k = 1$ és $8\pi^2 Km/3c^3$. Però, ¿què és m ? Integrant (20.11) sobre $(S, \tilde{g})$ en un instant de temps t_0 fixat, l'instant actual, obtenim

$$\int_S \sigma(t_0)f^3(t_0)dv = m \int_S dv = \frac{4\pi m}{3} ,$$

on dv indica l'element de volum de S amb la mètrica $\tilde{g}$ de curvatura 1. Observem que $\int_S \sigma(t_0)f^3(t_0)dv$ és la integral amb la nostra mètrica (actual) del volum per la densitat, o sigui la massa-energia total de l'univers. Anomenem M aquesta massa total. Llavors $m = 3M/4\pi$. Veiem, doncs, que la duració entre el principi i la fi de l'univers depèn només de la massa-energia total de l'univers M , la qual roman constant segons (20.11).

8 Trajectòries dels raigs de llum en els models de Robertson-Walker

Situem-nos en un model de Robertson-Walker maximal $M = I \times S$ amb la mètrica g donada per (20.2). Considerem una corba $s \rightarrow \alpha(s) = (t(s), \beta(s))$ de M i vegem quines equacions ha de complir per tal de ser geodèsica. El seu vector tangent és

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dt}{ds}U + \frac{d\beta}{ds},$$

on $U = \partial/\partial t$. Aquest vector tangent en cada punt $(t(s), \beta(s))$ és de la forma $hU + X$, on X és tangent a S i h és funció de $t(s)$. Considerem sobre M un camp de la forma $hU + X$, amb h funció de t i X camp vectorial sobre S . En virtut de la proposició 20.2, tindrem

$$\begin{aligned}\nabla_{hU+X}(hU+X) &= hU(h)U + 2h\frac{\dot{f}}{f}X + \tilde{\nabla}_X X + \frac{f\dot{f}}{c^2}\tilde{g}(X, X)U = \\ &= h\dot{h}U + 2h\frac{\dot{f}}{f}X + \tilde{\nabla}_X X + \frac{f\dot{f}}{c^2}g(X, X)U,\end{aligned}$$

on $\dot{h}$ i $\dot{f}$ designen les derivades de h i f respecte a t . En el cas que ens interessa, $h = dt/ds$. Per tant,

$$h(dh/dt) = h(dh/ds)(ds/dt) = (dt/ds)(d^2t/ds^2)(ds/dt) = d^2t/ds^2 = t'',$$

on indicarem per “primes” les derivades respecte a s (recordem que indiquem per “punts” les derivades respecte a t). L’equació de les geodèsiques $\nabla_{\alpha'}\alpha' = 0$ s’escriurà, doncs

$$0 = \nabla_{\alpha'}\alpha' = t''U + 2t'\frac{\dot{f}}{f}\beta' + \tilde{\nabla}_{\beta'}\beta' + \frac{f\dot{f}}{c^2}\tilde{g}(\beta', \beta')U,$$

d’on

$$\begin{cases} t'' + \frac{f\dot{f}}{c^2}\tilde{g}(\beta', \beta') &= 0 \\ 2t'\frac{\dot{f}}{f}\beta' + \tilde{\nabla}_{\beta'}\beta' &= 0. \end{cases} \quad (20.21)$$

Per poder interpretar la segona equació de (20.21) necessitem el resultat següent.

Proposició 20.9 Sigui $(S, \tilde{g})$ una varietat de Riemann i $s \rightarrow \beta(s)$ una corba de S que satisfà una equació de la forma

$$\tilde{\nabla}_{\beta'} \beta' = a(s) \beta'.$$

Llavors, fent un canvi de paràmetre $s = s(\tau)$ de manera que la funció $s(\tau)$ compleixi l'equació diferencial

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 a(s) + \frac{d^2 s}{d\tau^2} = 0,$$

la corba $\tau \rightarrow \beta(s(\tau))$ és una geodèsica.

DEMOSTRACIÓ. $d\beta/d\tau = (d\beta/ds)(ds/d\tau)$. Posem $h = ds/d\tau$. Tenim

$$\tilde{\nabla}_{(d\beta/d\tau)}(d\beta/d\tau) = h^2 \tilde{\nabla}_{(d\beta/ds)}(d\beta/ds) + h(dh/ds)(d\beta/ds).$$

Però

$$h(dh/ds) = (ds/d\tau)(dh/ds) = dh/d\tau = d^2 s/d\tau^2.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{(d\beta/d\tau)}(d\beta/d\tau) &= (ds/d\tau)^2 \tilde{\nabla}_{(d\beta/ds)}(d\beta/ds) + (d^2 s/d\tau^2)(d\beta/ds) = \\ &= \{(ds/d\tau)^2 a(s) + d^2 s/d\tau^2\} (d\beta/ds) = 0. \end{aligned}$$

Això prova la proposició. ■

Aquesta proposició ens permet interpretar la segona equació de (20.21): $\beta(s)$ és una pre-geodèsica de S (és a dir, fent un canvi de paràmetre $s = s(\tau)$ es converteix en una geodèsica).

Imposem ara la condició que $s \rightarrow \alpha(s)$ sigui una geodèsica de vector tangent de norma nul·la (aquí només estem interessats en els raigs de llum).

Proposició 20.10 Si $\alpha(s) = (t(s), \beta(s))$ és una geodèsica de $M = I \times S$ de vector tangent de norma nul·la, llavors $f(t(s))(dt/ds)$ és constant.

DEMOSTRACIÓ. El vector tangent α' de $\alpha(s)$ és de la forma $\alpha' = t'U + \beta'$. Imposem que α' tingui norma nul·la:

$$0 = g(\alpha', \alpha') = g(t'U + \beta', t'U + \beta') = -c^2 t'^2 + \tilde{g}(\beta', \beta') f^2. \quad (20.22)$$

Substituint aquí $\tilde{g}(\beta', \beta')$ pel valor que obtenim de (20.21), tindrem

$$0 = -c^2 t'^2 - \frac{c^2 f}{\tilde{f}} t''.$$

O sigui, $\dot{f}t'^2 + ft'' = 0$. O sigui, $(df/ds)(ds/dt)(dt/ds)^2 + ft'' = 0$. O sigui, $(df/ds)(dt/ds) + ft'' = 0$. O sigui, $f't' + ft'' = 0$. O sigui, $(ft')' = 0$. ■

Corol·lari 20.11 Si un fotó (o raig lluminós) és emès des d'una galàxia llunyana en un instant de temps t_p del passat i és rebut per nosaltres a l'instant t_0 actual, llavors la distància actual entre aquella galàxia i nosaltres és

$$cf(t_0) \int_{t_p}^{t_0} \frac{dt}{f(t)} .$$

DEMOSTRACIÓ. El fotó serà representat per una geodèsica $\alpha(s) = (t(s), \beta(s))$ de vector tangent de norma nul·la. Anomenem s_p el valor del paràmetre s tal que $t(s_p) = t_p$. Anomenem s_0 el valor del paràmetre tal que $t(s_0) = t_0$. Llavors la longitud a la varietat S de la corba $s \rightarrow \beta(s)$ entre s_p i s_0 és

$$\int_{s_p}^{s_0} \sqrt{\tilde{g}(\beta', \beta')} ds .$$

Ara bé, en virtut de (20.22), $\tilde{g}(\beta', \beta') = c^2 t'^2 / f^2$. Per tant, la longitud anterior és

$$c \int_{s_p}^{s_0} \left(\frac{1}{f(t(s))} \cdot \frac{dt}{ds} \right) ds = c \int_{t_p}^{t_0} \frac{dt}{f(t)} .$$

Si ara volem la longitud amb la mètrica induïda a S per g a l'instant actual t_0 , haurem de multiplicar la longitud obtinguda anteriorment per $f(t_0)$. ■

9 Trajectòries dels raigs de llum en els models de Friedmann

Apliquem ara els resultats anteriors al cas particular dels models de Friedmann i obtindrem resultats molt més concrets. A l'apartat 7 consideràvem un temps τ que estava relacionat amb el temps galàctic t per mitjà de l'equació diferencial $c dt = f(\tau) d\tau$. Quan la curvatura k de S era nul·la havíem vist que $ct = B\tau^3/12$. En el cas $k = 1$ la relació entre t i τ venia donada per (20.19), i en el cas $k = -1$ venia donada per la segona equació de (20.20). Designem per $t = t(\tau)$ la funció que relaciona t amb τ en els tres casos anteriors i sigui $\tau = \tau(t)$ la funció inversa.

Proposició 20.12 Sigui $s = s(t)$ la funció

$$s = \int_{t_0}^t f(t) dt ,$$

on t_0 és un origen arbitrari fixat.

Sigui $t = t(s)$ la funció inversa. Sigui $\tau \rightarrow \beta(\tau)$ una geodèsica qualsevol de S on τ és un paràmetre geodèsic. Les geodèsiques de $M = I \times S$ de vector tangent de norma nul·la són de la forma

$$\alpha(s) = (t(s), \beta(\tau(t(s)))) ,$$

on $\tau(t)$ és la funció introduïda abans.

DEMOSTRACIÓ. En virtut de la proposició 20.10, $f(t(s))(dt/ds)$ és constant. Multiplicant per una constant convenient el paràmetre geodèsic s , es pot considerar que

$$f(t(s)) \frac{dt}{ds} = 1 .$$

O sigui, $f(t)dt = ds$. O sigui

$$s = \int_{t_0}^t f(t)dt .$$

En virtut de la proposició 20.10 i de (20.21), una geodèsica $\alpha(s) = (t(s), \beta(s))$ de M compleix que β és una pre-geodèsica amb paràmetre geodèsic τ relacionat amb s per mitjà de

$$\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 a(s) + \frac{d^2s}{d\tau^2} = 0 , \quad (20.23)$$

amb

$$a(s) = -2 \frac{dt}{ds} \frac{\dot{f}}{f} .$$

Però $\dot{f} = df/dt = (df/ds)(ds/dt)$. Per tant,

$$a(s) = -2 \frac{1}{f} \frac{df}{ds} .$$

Així doncs, l'equació (20.23) s'escriu

$$-2 \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 \frac{df}{ds} \frac{1}{f} + \frac{d^2s}{d\tau^2} = 0 . \quad (20.24)$$

Vegem que la funció $\tau(s) = \tau(t(s))$, on $\tau(t)$ és la que hem descrit abans i $t(s)$ és la funció inversa de $s(t) = \int_{t_0}^t f(t)dt$, compleix l'equació diferencial anterior.

Sabem que la relació entre τ i t és $c dt = f d\tau$, d'on $d\tau = c dt / f$. D'altra banda $ds = f(t) dt$, d'on $ds/d\tau = f^2/c$. Derivant un altre cop, $d^2s/d\tau^2 = (2f/c)(df/ds)(ds/d\tau) = (2f^3/c^2)(df/ds)$. Substituint aquests valors a (20.24), veiem que es compleix idènticament. ■

Situem-nos en un model de Friedmann maximal $I \times S$ amb $k = 1$. Suposem que S és l'esfera S^3 de dimensió 3 i curvatura 1. Sabem (apartat 7) que $I =]0, t_F[$ amb $t_F = 2\pi KM/c^3$, on M és la massa-energia total de l'univers (que roman constant al llarg del temps). Apliquem ara la proposició 20.12 amb $t_0 = 0$ i $\beta(\tau)$ un cercle màxim qualsevol de S parametritzat per l'angle τ , $0 \leq \tau \leq 2\pi$. Anomenem s_F el valor del paràmetre s que correspon a t_F ; o sigui, $t(s_F) = t_F$. El valor de s que correspon a $t = 0$ és $s = 0$. Com que la funció $\tau = \tau(t)$ ve donada per (20.19), tindrem $\tau(0) = 0$ i $\tau(t_F) = 2\pi$. Així doncs, la geodèsica $\alpha(s)$ de $M = I \times S$ descrita a la proposició 20.12 i que correspon a la geodèsica $\beta(\tau)$ de S complirà

$$\alpha(0) = (0, \beta(0))$$

$$\alpha(s_F) = (t_F, \beta(2\pi)) .$$

Això ens diu que un raig lluminós emès al principi de l'univers ($t = 0$) en una determinada direcció de S , arriba al mateix punt de partida (fa una volta sencera a S) just a l'instant final de l'univers ($t = t_F$). Dit d'una altra manera, triga tota la duració de l'univers a fer una volta sencera a S .

Índex de noms i de matèries

- acceleració 127
- acceleració de Minkowski 255
- acceleració relativa 127, 215
- acció d'un grup 300
- acció efectiva 300
- acció transitiva 300
- afinitat 224, 233
- àlgebra de Lie 299
- anomalia excèntrica 181
- anomalia vertadera 181
- aplicació de Gauss 47, 48
- aplicació de Weingarten 47, 48
- aplicació diferenciable 63
- aplicació exponencial 299, 303
- aplicació lineal tangent 23, 66
- atlas 60, 110
- atlas equivalents 61
- avançament del periheli 328
- barra rígida 135, 144
- base numerable d'oberts 60
- base orto-c-normal 242
- Bergman 296, 317
- Bianchi 90, 102
- binormal 30
- Biot-Savart 204
- braç d'Orió 346
- Cahen 296, 317
- camp de forces 132
- camp elèctric 195, 196, 272
- camp exterior 115
- camp gravitatori produït per una estrella 295
- camp magnètic 203, 272
- camp tensorial 66, 67
- camp vectorial 19, 37, 66
- camps de Killing 83
- canvis de Galileu 217, 219
- carta local 61
- carta local admissible 63
- Cartan 54
- centre de masses 163
- Christoffel 7 (vegeu símbols de...)
- cinemàtica 127, 215
- classe d'equivalència d'atlas 61
- claudàtor 21, 22, 67
- connexió 74
- connexió compatible amb la mètrica 77
- connexió de Riemann 77, 78
- conservació de l'energia 133, 159
- conservació de la impulsió de Minkowski 255
- conservació de la quantitat de moviment 156, 161
- conservació del moment de la quantitat de moviment 158
- constant d'Einstein 289, 293
- constant de gravitació universal 174, 215, 293
- contracció de les distàncies 237, 249
- contracció interior 17
- contracció tensorial 13, 98
- corba 27, 74

- corrent elèctric 204
- cos rígid 163
- cosmologia 345
- coulomb estàtic 196
- curvatura constant 91, 362
- curvatura d'una corba 29, 30, 33
- curvatura de Gauss 45, 48, 49, 50, 53, 86, 87
- curvatura escalar 105, 355
- curvatura mitjana 45
- curvatura normal 43
- curvatura seccional 89, 91
- curvatura, tensor 85, 93
- curvatures principals 44, 45, 50
- càlcul de variacions 79
- càrrega elèctrica 196, 271
- cúmuls de galàxies 346
- de Sitter 345
- densitat 185
- densitat de corrent elèctric 205
- densitat de força exterior 264
- densitat de massa-energia 263
- densitat en un model de Robertson-Walker 351
- derivació de l'àlgebra tensorial 98
- derivada covariant 21, 22, 39, 42, 74, 93, 97, 147
- derivada direccional 21, 39, 44, 48
- desigualtat de Schwarz 242
- desigualtat triangular 243
- desviament dels raigs de llum 334
- Dicke 346
- diferencial covariant 100
- diferencial exterior 23, 24, 25, 51, 52
- dilatació del temps 237, 247
- dinàmica de la relativitat especial 115
- dinàmica de Newton 128
- direcció asimptòtica 45, 46
- direcció principal 44, 45
- disc giratori 277
- distribució 296, 297
- divergència 101, 121, 123
- divergència del tensor de Ricci 106
- doble pèndol 137, 143, 159
- Einstein 219, 289, 345 (vegeu constant, equació, tensor)
- electromagnetisme 195, 271
- electrostàtica 195
- element de volum 121
- energia 133, 259
- energia cinètica 131, 150, 165
- energia cinètica de rotació 166
- energia en repòs 259
- equacions de Lagrange 148, 153
- equacions de les còniques en polars 171
- equacions de Maxwell 211, 216, 271
- equacions del moviment 146, 192, 266
- equació d'Einstein 287-289
- equació de continuïtat 184, 185, 210
- equació de Kepler 180, 181
- equació de Poisson 202, 210, 287, 295
- equivalència de massa i energia 257
- esfera 35
- espai de Minkowski 240
- espai projectiu 62, 311
- espai tangent 37, 64, 65
- espai topològic 59
- espai-temps 285
- espai-temps de Kruskal 336
- espai-temps de Schwarzschild 326
- espais d'aplicacions lineals 11
- espais d'aplicacions multilineals 11, 12, 69

- èter 219
- excentricitat d'una cònica 171
- experiment de Michelson i Morley 219, 223
- fi de l'univers 359
- fibrat tangent 139
- fluid perfecte 193, 269
- flux magnètic 208
- focus d'una cònica 171
- foliació 296, 297
- forat negre 296, 336, 337
- formes diferencials 23, 24, 25, 50, 51, 66, 67
- formes diferencials vectorials 50, 51
- força 131
- força centrífuga 281
- força centrípeta 281
- força de lligadura 141, 187
- força de Minkowski 255, 260
- força electromotriu 208
- fotons en repòs 341
- Frenet 29, 32
- Friedmann 345
- funció de Lagrange 153, 167
- funció diferenciable 64
- fórmula de derivació d'integrals 183
- fórmula de Stokes 119, 209
- galàxia 346
- Gauss 7 (vegeu aplicació, curvatura)
- geodèsica 81, 365, 366
- geodèsiques de l'espai-temps de Schwarzschild 328, 334
- geodèsiques de l'espai-temps de Kruskal 343
- geodèsiques del semiplà de Poincaré 82
- gradient 132
- grup d'isometries 302, 309
- grup de Lie 298
- grup de rotacions 158, 309
- grup lineal d'isotropia 309
- grup uniparamètric 20, 155, 158, 299
- Hawking 345
- hiperpla admissible 233
- Hubble 345 (vegeu llei)
- Humason 345
- identitat de Bianchi 90, 102
- identitat de Poisson 202, 210, 287
- imatge inversa 26, 69
- impulsió de Minkowski 255
- integració en varietats 116
- intensitat de corrent 204, 205
- isometria 52
- isometries infinitesimals 83
- isotropia espacial 348
- Killing 83
- Kohlrausch i Weber 205
- Koman 296, 317
- Kruskal 336 (vegeu espai-temps)
- lema de l'encongiment 70
- lleï d'Ampère 211
- lleï de composició de velocitats 239
- lleï de Coulomb 196
- lleï de Faraday 209, 210
- lleï de gravitació universal de Newton 174, 215
- lleï de Hubble 358
- lleï de Laplace 205, 210
- lleï de les àrees 177
- lleï de Lorentz 212, 272
- lleis de Kepler 177, 178
- lleis del xoc 255
- lligadures 135, 187
- lligadures holònomes 135
- localització de connexions 75
- localment compacte 60
- longitud d'un arc de corba 27,

- 73, 74
 línia asimptòtica 46, 47
 línia de curvatura 46, 47, 48, 49
 magnetisme 203
 magnetostàtica 203, 204
 massa 128, 129, 252, 253
 mecànica dels medis continus 183
 models cosmològics 345
 models de Friedmann 362, 367
 models de Robertson-Walker 346, 359, 365
 moment d'inèrcia 167
 moment de la quantitat de moviment 157
 moviment uniforme 127, 216, 221
 mètrica de Riemann 73, 147
 Newton 7, 127, 128, 174, 215 (vegeu llei)
 normal principal 30
 observador 285
 observador inercial 216, 231
 oersted 203
 ordre de contacte 28, 29
 orientabilitat temporal 286, 287
 orientable 113
 orientació 113
 Orió 346
 paracompacte 59
 paradoxa dels bessons 249
 partició de la unitat 70, 71
 paràmetre arc 27, 28
 Peebles 346
 Penzias 346
 període 178
 pla admissible 233
 Poincaré 219 (vegeu semiplà)
 potencial 132, 152, 196
 potència 131, 262
 pre-geodèsica 366
 pressió en un model de Robertson-Walker 351
 primera forma quadràtica 38
 principi d'invariància de la velocitat de la llum 222, 231
 principi de Cauchy 187, 188
 principi de l'univers 359
 principi de les potències virtuals 141
 principi de relativitat 222, 231
 problema dels dos cossos 174
 producte exterior 15, 16
 producte tensorial 9, 10
 producte tensorial, base del 10, 11
 producte tensorial, propietat universal 12
 producte tensorial, unicitat 9
 punt el·líptic 46
 punt hiperbòlic 46
 punt parabòlic 46
 pèndol amb punt de suspensió mòbil 139, 157
 pèndol doble 137, 143, 159
 pèndol simple 137, 141, 151, 153, 159
 quantitat de moviment 131, 156, 163, 186, 251
 quantitat de moviment de Minkowski 255
 referència mòbil 93
 refinament 59
 relativitat especial 215-276
 relativitat general 277-369
 rellotges sincronitzats 220
 Ricci 105, 288, 317, 354
 Riemann 7 (vegeu connexió, mètrica, varietat)
 Robertson 345
 Roll 346
 rotacional 133
 Schwarzschild 325 (vegeu

- espai-temps, geodèsiques, solució)
- segona forma quadràtica 39, 40, 41, 43, 49
- sempiplà de Poincaré 74, 82
- simetria esfèrica 301
- simplement connex 133
- sincronitzats 220
- sistema de referència 215, 220
- sistema inercial 222
- sistemes equivalents 221
- solució de Schwarzschild 325
- Stokes 119
- subgrup d'isotropia 300
- superfície 35
- superfícies isomètriques 53
- símbols de Christoffel 74, 75, 280
- temps propi d'una partícula 244-246
- tensor d'Einstein 289, 356
- tensor d'impulsió-energia 125, 268
- tensor d'inèrcia 167
- tensor de curvatura 85, 93
- tensor de les tensions 191, 265
- tensor de Ricci 105, 288, 317, 354
- tensors antisimètrics 14, 15
- tensors contravariants 11
- tensors covariants 11
- tensors simètrics 14, 15
- teorema de Birkhoff 317
- teorema de Cauchy 189
- teorema de Frobenius 297
- teorema de la divergència 121, 123
- teorema de Schur 102, 103
- teorema egregi 7, 53, 87
- teoria de la gravitació 284
- time-like 232
- tor 35, 58
- torsió 29, 31, 33
- trajectòria virtual 132
- transformacions de Lorentz 223-230, 236, 238
- treball 131
- treball virtual 133
- umbilic 46
- univers 345
- variació d'una corba 79
- varietat amb vora 109, 110
- varietat de Lorentz 286, 301
- varietat de Riemann 73
- varietat diferenciable 61, 110
- vector exterior 112
- vector interior 112
- vector tangent 27, 37, 63
- vector temporal 232
- velocitat 127
- velocitat angular 164
- velocitat de Minkowski 255
- velocitat relativa 127
- velocitat virtual 139
- Via Làctia 346
- Voigt 219
- volum 121
- vora d'una varietat 110
- Walker 345 (vegeu models)
- Wilkinson 346
- Wilson 346
- xoc de partícules 160
- xoc elàstic 161, 252, 260
- xoc inelàstic 161, 258



9 788499 656618



Societat Catalana de Matemàtiques

Filia de l'Institut d'Estudis Catalans

<http://scm.iec.cat>